

0.1 Mathematisches

Es gilt

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n) \quad f(x_n) = 0 \wedge f'(x_n) \neq 0$$

Für Kugelkoordinaten gilt

$$\vec{r} = R \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

und

$$R \sin \theta \vec{e}_\phi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$$

$$R \vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$$

und

$$d\vec{f} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$$

0.2 Elektrostatik

$$\int \vec{E} d\vec{f} = 4\pi \int \rho dV \iff \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho$$

und damit

$$\nabla^2 \phi = -4\pi \rho$$

mit

$$E = -\nabla \phi$$

Mit der allgemeinen Lösung

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV$$

Weiterhin gilt für die Energie im elektrischen Feld

$$W = \int \frac{E^2}{8\pi} dV$$

Weiterhin gilt für die Oberflächenladung σ an einer Grenzfläche mit Normalenvektor $\vec{n}$

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_{aus} - \vec{E}_{ein}) = 4\pi\sigma$$

wobei $\vec{E}_{aus}$ das von der Grenzfläche weggehende Elektrische Feld ist.

Für die Lösung (Nicht auf dem Zettel) der Laplacegleichung können wir jedoch auch ansetzen in kartesischen Koordinaten

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

und wählen

$$\phi = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

und damit

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \frac{1}{X} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \frac{1}{Y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \frac{1}{Z} = 0$$

Da die einzelnen Summanden zusammen null ergeben müssen, müssen sie konstanten sein. Wähle

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \frac{1}{X} &= -\alpha^2 & \implies X(x) &= \sin(\alpha x) + \cos(\alpha x) \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \frac{1}{Y} &= -\beta^2 & \implies Y(y) &= \sin(\beta y) + \cos(\beta y) \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \frac{1}{Z} &= \alpha^2 + \beta^2 & \implies Z(z) &= \sinh(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z) + \cosh(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z) \end{aligned}$$

(Ab hier wieder) Weiterhin gilt

$$\int \sin(\omega x)^2 \, dx = \frac{1}{2\omega} \left(\omega x - \frac{1}{2} \cos(\omega x) \sin(\omega x) \right)$$

Für die zugeordneten Legendrepolynome gilt im Bereich $x \in [-1, 1]$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

und

$$\int_{-1}^1 P_l P_q \, dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lq}$$

so vor allem

$$\int_{-1}^1 P_l \, dx = \int_{-1}^1 P_l \cdot 1 \, dx = \int_{-1}^1 P_l P_0 \, dx = 2\delta_{l0}$$

Daraus folgt

$$f(x) = \sum_n A_n P_n(x) \implies A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) f(x) \, dx$$

Für die allgemeinen Legendre Polynome gilt

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

und

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

auch die sind orthogonal mit

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l_2}^{m_2}(x) \, dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll_1} \delta_{mm_1}$$

Damit können wir die Kugelflächenfunktionen definieren als

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi)$$

und

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{l,m}^*$$

Orthogonal mit

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{l,m} Y_{l',m'} \, d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Haben wir eine lokalisierte Ladungsverteilung $\rho = 0 \iff |x| > R$ und betrachten wir das Potential für $|x| > R$ in Kugelkoordinaten, so gilt

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}$$

wobei q_{lm} die Multipole bezeichnet mit

$$q_{lm} = \int r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(r', \theta', \varphi') d^3x'$$

0.3 Magnetostatik

mit Ampere gilt

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} I \frac{d\vec{l} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Für die Kraft bei einer anwesenden magnetischen Induktion $\vec{B}_2$ gilt

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} d\vec{l} \times \vec{B}_2$$

Allgemein gilt für die Kraft

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int \vec{j}(x) \times \vec{B}(x) d^3x$$

und das Gesamtdrehmoment

$$\vec{N} = \frac{1}{c} \int \vec{x} \times (\vec{j} \times \vec{B}) d^3x$$

Amperesches Durchflutungsgesetz

$$\oint_{\partial S} \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I_S = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{A}$$

Für das magnetische Moment gilt

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') d^3x'$$

0.4 Elektrodynamik

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = (1 + 4\pi\chi_e) \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = (1 + 4\pi\chi_b) \vec{H} = \vec{B} + 4\pi \vec{M}$$

Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Für die elektromagnetische Energiedichte u folgt

$$u = \frac{1}{8\pi} \left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H} \right)$$

und der Poynting Vektor mit

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$$

Für das Fernfeld gilt

$$\vec{A}_\omega = \frac{\exp(ikr)}{cr} \int d^3x' \vec{j}_\omega \exp(-ik\vec{n} \cdot \vec{x}')$$

0.5 SRT

Wir benutzen nun Vierervektoren mit $X_\mu = (ct, x, y, z)$ transformiert mit

$$X_\mu = \Lambda_\mu^\nu X_\nu \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Falls sich das System in x -Richtung bewegt.

Weiterhin gilt auch

$$M_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\rho \tilde{M}_{\rho\sigma} \Lambda_\nu^\sigma$$

Allgemein gilt

$$\vec{A}_\mu = (A_0, \vec{A}) = (A_0, \vec{A}_\perp + \vec{A}_\parallel)$$

und dann

$$\begin{aligned}A'_0 &= \gamma \left(A_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{A} \right) \\ \vec{A}'_{\parallel} &= \gamma \left(\vec{A}_{\parallel} - \vec{\beta} \cdot A_0 \right) \\ \vec{A}'_{\perp} &= \vec{A}_{\perp}\end{aligned}$$

Es ergibt sich das *invariante* Skalarprodukt

$$A_{\mu}B^{\mu} = A_0B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

Es ergibt sich auch weiterhin das *invariante* Linienelemente

$$ds^2 = c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2$$

(Herleitung steht nicht auf dem Blatt) Betrachten wir nun ein Ruhesystem K' mit der Eigenzeit τ , dort gilt

$$\begin{aligned}dt &= d\tau \\ d\vec{x} &= 0 \\ ds^2 &= c^2 d\tau^2\end{aligned}$$

Im bewegten System gilt

$$\begin{aligned}dt &= dt \\ (d\vec{x})^2 &= \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 dt^2 = (-u\vec{e}_x)^2 dt^2 = u^2 dt^2 = \beta^2 c^2 dt^2 \\ ds^2 &= c^2 dt^2 (1 - \beta^2) = c^2 dt^2 \gamma^{-2}\end{aligned}$$

Es folgt

$$dt = \gamma d\tau$$

und für die Längenkontraktion folgt

$$l(v) = \frac{l(0)}{\gamma}$$

Falls die Bewegung in x-Richtung läuft, so folgt für die Geschwindigkeit $\vec{u}$

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} \\ &= \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \frac{u_x}{c}} \\ &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ \begin{pmatrix} u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \frac{u_x}{c}} \begin{pmatrix} u_y \\ u_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit dem Vierervektor

$$U_\mu = \gamma(c, \vec{u})$$

können wir den Viererimpuls-Energie-Vektor definieren

$$P_\mu = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{u}) = \left(\frac{E}{c}, \gamma m_0 \vec{u} \right)$$

Wobei nun für den dreierimpuls gilt

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{u}$$

Es gibt eine Invarianz von

$$P_\mu P^\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m_0^2 c^2$$

und damit gilt für die Energie

$$E^2 = m_0^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2$$

Für die Kraft gilt

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = F^\mu$$

wobei wir die Viererkraft definieren im Ruhesystem mit

$$F^\mu[Ruhe] = (0, \vec{F}_R)$$

Damit gilt in einem beliebigen System

$$F^\mu = \Lambda^\mu_\nu F^\nu[Ruhe]$$

und damit

$$F^\mu = \left(\gamma \vec{v} \cdot \vec{F}_R, \vec{F}_R + (\gamma - 1) \vec{v} \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}_R}{v^2} \right)$$

Mit dem Vierervektor

$$J^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

wird die Kontinuitätsgleichung zu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \implies \partial_\mu J^\mu = 0$$

Wir erhalten ebenfalls aus dem früheren

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \square \phi = 4\pi \rho$$

mit

$$A^\mu = (\phi, \vec{A})$$

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

und

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu$$

Wir können uns den antisymmetrischen Feldstärketensor definieren mit

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

und

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Weiterhin ergibt sich

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2 \left(|\vec{B}|^2 - |\vec{E}|^2 \right)$$

Für den dualen Feldstärketensor gilt

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Damit werden die inhomogenen Gleichungen der Maxwellgleichungen zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

und die homogenen zu

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

Für die Kraft folgt also

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} U_\nu$$

Es ergeben sich folgende Transformationen für die Felder

$$\vec{E}' = \gamma \left(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{E} \right)$$

$$\vec{B}' = \gamma \left(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{B} \right)$$

Felder-Transformationen sind nicht auf dem Blatt, falls das drankommt, mach ichs über Transformation vom Feldstärketensor. Vllt kommts drauf wenn ich noch Platz finde, nicht sicher.

0.6 Laplace und Nabla

Kugelkoordinaten

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(A_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Zylinderkoordinaten

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Theoretische Physik C

Gehört bei Prof. Dr. Klinkhamer

KIT - Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2011/12

Mitschriebe ausgearbeitet von

Philipp Basler, Nils Braun, Larissa Bauer

5. März 2012

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

1.1 Vektoranalysis

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= b(a \cdot c) - c(a \cdot b) & \nabla \times (\nabla \times a) &= \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a \\ \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV &= \int_{\partial V} \mathbf{A} \cdot \hat{n} \, dA & \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{n} \, dA &= \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

1.2 Koordinatensysteme

1.2.1 Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} \quad dV = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

$$\begin{aligned} \nabla A &= \hat{e}_\rho \partial_\rho A + \hat{e}_\phi \frac{1}{\rho} \partial_\phi A + \hat{e}_z \partial_z A & \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \partial_\phi A_\phi + \partial_z A_z \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \hat{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \hat{e}_\phi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \hat{e}_z \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \\ \nabla^2 A &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \end{aligned}$$

1.2.2 Kugelkoordinaten

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$\begin{aligned} \nabla A &= \hat{e}_r \frac{\partial A}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A}{\partial \phi} & \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(A_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\phi \\ \nabla^2 A &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

1.3 Lösungen der Poissongleichung $\nabla^2 \phi = 0$

Kartesische Koordinaten

$$\Phi = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}$$

Zylinderkoordinaten ohne z -Abhängigkeit:

$$\Phi = A \ln \rho + \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi] r^n + [A'_n \cos n\phi + B'_n \sin n\phi] r^{-n}$$

nur ρ -Abhängigkeit:

$$\Phi = A \ln \rho + A_0$$

Kugelkoordinaten

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}] Y_{lm}(\theta, \phi)$$

ohne ϕ -Abhängigkeit:

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta)$$

nur r -Abhängigkeit:

$$\Phi = A_0 + B_0 r^{-1}$$

1.4 Orthogonalsysteme

1.4.1 Legendre-Polynome

$$\int_{-1}^1 dx P_{l'} P_l = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l}$$

P_0	P_1	P_2	P_3
1	x	$\frac{1}{2}(-1 + 3x^2)$	$\frac{1}{2}(-3x + 5x^3)$

1.4.2 Kugelflächenfunktionen

$$Y_{l-m} = (-1)^m Y_{lm}^* \quad \int d\Omega Y_{l'm'}^* Y_{lm} = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$$

$Y_{0,0}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$		
$Y_{1,0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta$	$Y_{1,1}$	$-\frac{1}{2}e^{i\phi}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta$
$Y_{2,0}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$	$Y_{2,1}$	$-\frac{1}{2}e^{i\phi}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cos \theta \sin \theta$
		$Y_{2,2}$	$\frac{1}{4}e^{2i\phi}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta$

1.5 Tensoranalysis

$$\sum \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

Kapitel 2

Physikalische Grundlagen

2.1 Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \delta_{ij} \right]$$

2.2 Materie

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} - 4\pi\mathbf{P} \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Grenzflächenbedingungen:

$$\Delta D_{\perp} = 4\pi\rho \quad \Delta E_{\parallel} = 0 \quad \Delta H_{\parallel} = \frac{4\pi}{c} j \quad \Delta B_{\perp} = 0$$

2.3 SRT

$$g_{ij} = g^{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Transformation von Vierervektoren $X^\mu = (x_0, \mathbf{x})$

$$x'_0 = \gamma(x_0 - \beta \mathbf{x}) \quad x'_\parallel = \gamma(x_\parallel - \beta x_0)$$

Transformation von Feldern:

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta(\beta \cdot \mathbf{E})$$

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta(\beta \cdot \mathbf{B})$$

Eigenzeit

$$dt = \gamma(t) d\tau$$

Eigenlänge

$$l_0 = \gamma l_v$$

Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad F_{00} = 0 \quad F_{0k} = E_k \quad F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k$$

$F_{\mu\nu} \rightarrow F^{\mu\nu}$: Tausche E mit $-E$. $F_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}$: Tausche E mit $-B$, B mit $-E$.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

Kapitel 3

Physikalische Anwendungen

3.1 Greensche Funktion

$$\Phi(x) = \int_V G(x, x') \rho(x') - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} \phi(x')$$

Einfache Greensche Funktion

$$G = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Greenschefunktion zur Kugelspiegelladung

$$G = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{a}{x' |\mathbf{x} - \frac{a^2}{x'^2} \mathbf{x}'|}$$

3.2 Multipolentwicklung

Sphärisch:

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad q_{lm} = \int_V dV \rho(r, \theta, \phi) r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi)$$

Kartesisch:

$$\Phi = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \quad Q = \int \rho \quad \mathbf{p} = \int \mathbf{x} \rho \quad Q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho$$

Magnetisch:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{j} \, dV \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \left[\frac{3\hat{e}_r(\hat{e}_r \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} \right]$$

3.3 Eichungen

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad \Phi \rightarrow \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

3.3.1 Lorenzeichung

Bedingung:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

Folgerung:

$$\square \Phi = -4\pi\rho \quad \square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

3.3.2 Coulombeichung

Bedingung:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Folgerung:

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho \quad \square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{trans}}$$

3.4 Antennen

Allgemeine Lösung:

$$\mathbf{A} = \frac{e^{-i\omega t}}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \, dV \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B}$$

Fernzone (erste Näherung):

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx r - \hat{e}_r \cdot \mathbf{x}' \quad \mathbf{A} = \frac{e^{-i\omega t}}{c} \frac{e^{ikr}}{r} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') e^{-ik\hat{e}_r \cdot \mathbf{x}'} \, dV$$

Dipolnäherung (zweite Näherung): Setze

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \, dV = \frac{1}{i\omega} \int \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}) \, dV$$

Dann

$$\mathbf{A} = -ik\mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \quad \mathbf{B} = k^2 \hat{e}_r \times \mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) e^{-i\omega t}$$

und genähert

$$\mathbf{B} = k^2 (\hat{e}_r \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \quad \mathbf{E} = \mathbf{B} \times \hat{e}_r$$

Die Leistung ist

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} k^4 \mathbf{p}^2 \sin^2 \theta \quad P = \frac{ck^4}{3} \mathbf{p}^2$$

3.5 Vierervektoren

Ortsvektor

$$X^\mu = (ct, \mathbf{x})$$

Vierergeschwindigkeit

$$U^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$$

Viererbeschleunigung

$$\frac{\partial U^\mu}{\partial \tau}$$

Viererimpuls

$$P^\mu = \gamma M U^\mu = (E/m, \mathbf{p}) \quad M^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2 = E^2$$

Viererstrom

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$$

Viererpotential

$$A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$$

Wellenvektor

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right)$$

Dieses Skript wurde heruntergeladen von
ugroup.hostzi.com



Alle Rechte verbleiben beim lesenden Dozenten.
Keine Garantie auf Richtigkeit oder Vollständigkeit.