

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Literatur

- 1) J. D. Jackson, Classical Electrodynamics
(auch auf Deutsch)
- 2) D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics
- 3) Landau & Lifschitz, B.2 & B. 8
(Deutsch oder Englisch)

Elektrostatik

- Statische (nicht bewegende) Ladungen und Felder
- Kräfte zwischen Ladungen erfunden von **Charle August de Coulomb** (1736-1806) und **Henry Cavendysh** (1731-1810)
- Mathematischer Formalismus: **George Green** (1793 - 1841) und **Karl Friedrich Gauß** (1777-1855)

Coulomb'sches Gesetz

$$\vec{\mathbf{F}} = k q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Kraft auf Ladung q_1 im Punkt $\vec{r}_1$ erzeugt von Ladung q_2 im Punkt $\vec{r}_2$

Elektrisches Feld: $\vec{\mathbf{F}} = q \vec{\mathbf{E}}$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = k q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Elektrisches Feld im Punkt $\vec{r}$ erzeugt von Ladung q_i im Punkt $\vec{r}_i$

Einheitensysteme

Gauß'sches System (cm, g, s) und $k = 1$

Die Wahl von k bestimmt die Einheit der Ladung durch das Coulomb'sches Gesetz

$$\vec{F} = q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad \vec{F} = q \vec{E} \quad \vec{E}(\vec{r}) = q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

SI (m, kg, s) und $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

Einheit der Ladung (Coulomb) wird durch die Stromeinheit (Ampere) bestimmt: Coulomb = Ampere x Sekunde

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad \vec{F} = q \vec{E} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Viele Ladungen

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad \text{Delta-Funktion}$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) \frac{\vec{r} - \vec{r}_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3}$$

Delta-Funktion

$$\delta(x \neq 0) = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \delta(x) = 1$$

Definition:

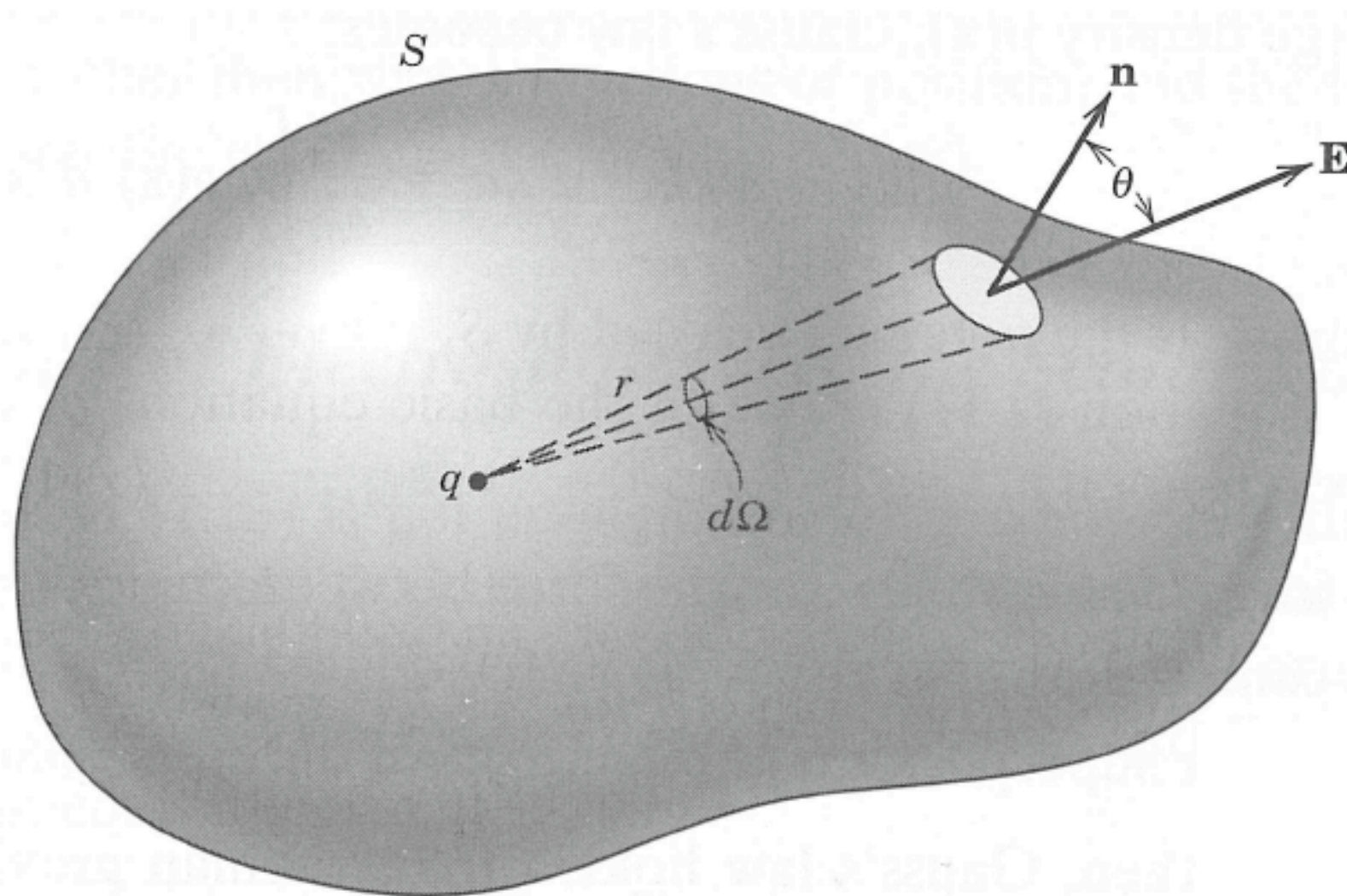
für beliebige (kontinuierliche) Funktion $g(x)$ gilt $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, g(x) \delta(x - x_0) = g(x_0)$

In 3D

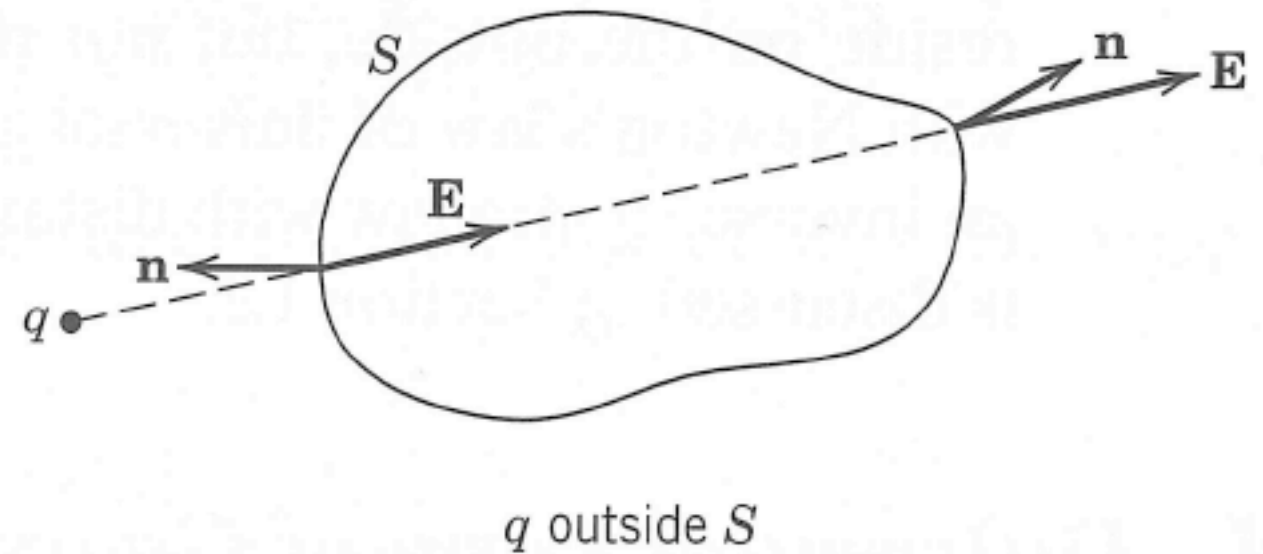
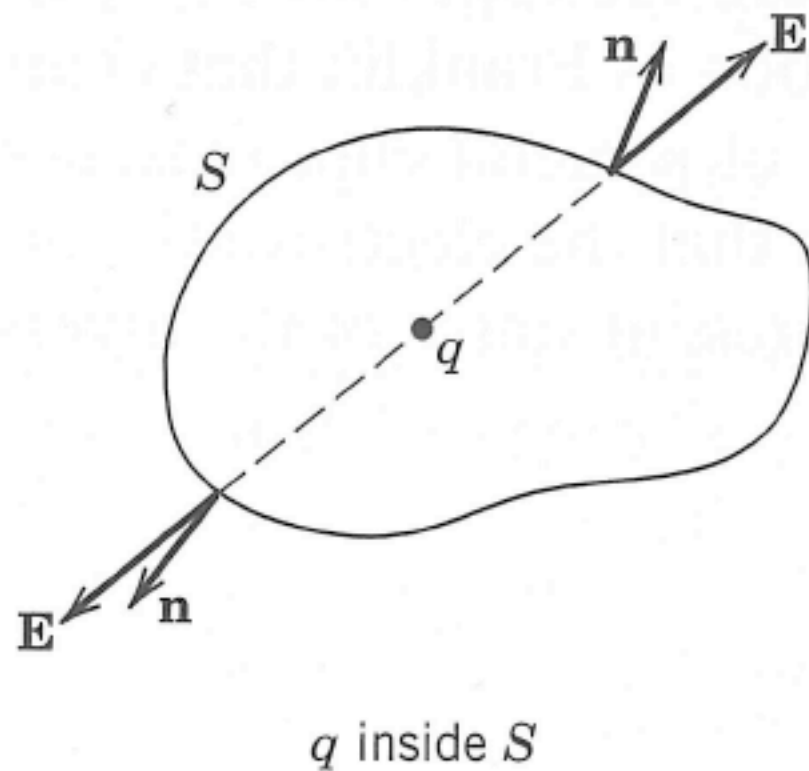
$$\delta^{(3)}(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

Gauß'sches Gesetz

Fluss des E-Feldes durch die Oberfläche



$$(\vec{E} \cdot \vec{n}) d\sigma = q \frac{\cos \theta}{r^2} d\sigma = q d\Omega$$

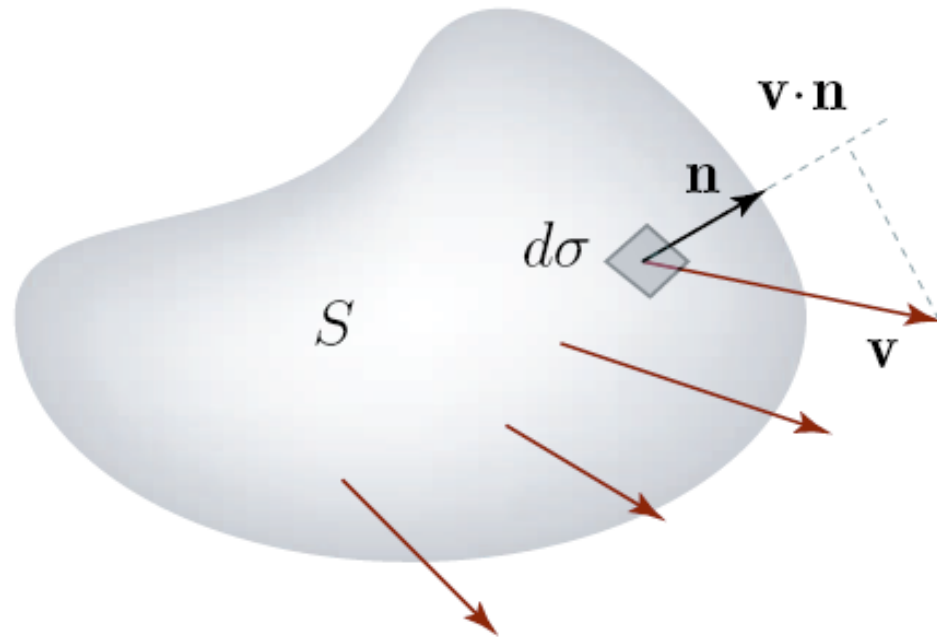


$$(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) d\sigma = q d\Omega$$

$$\int_S d\sigma (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) = \begin{cases} 4\pi q & \text{if } q \text{ inside } S \\ 0 & \text{if } q \text{ outside } S \end{cases}$$

$$\int_S d\sigma (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) = 4\pi \sum_i q_i = 4\pi \int_{V(S)} dV \rho$$

Gauß'sches Gesetz



$$\int_S d\sigma (\vec{v} \cdot \vec{n}) = \int_{V(S)} dV (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

Gauß'sche Formel (allgemein mathematisch)

mit $\vec{v} = \vec{E}$ und $\int_S d\sigma (\vec{E} \cdot \vec{n}) = 4\pi \int_{V(S)} dV \rho$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$

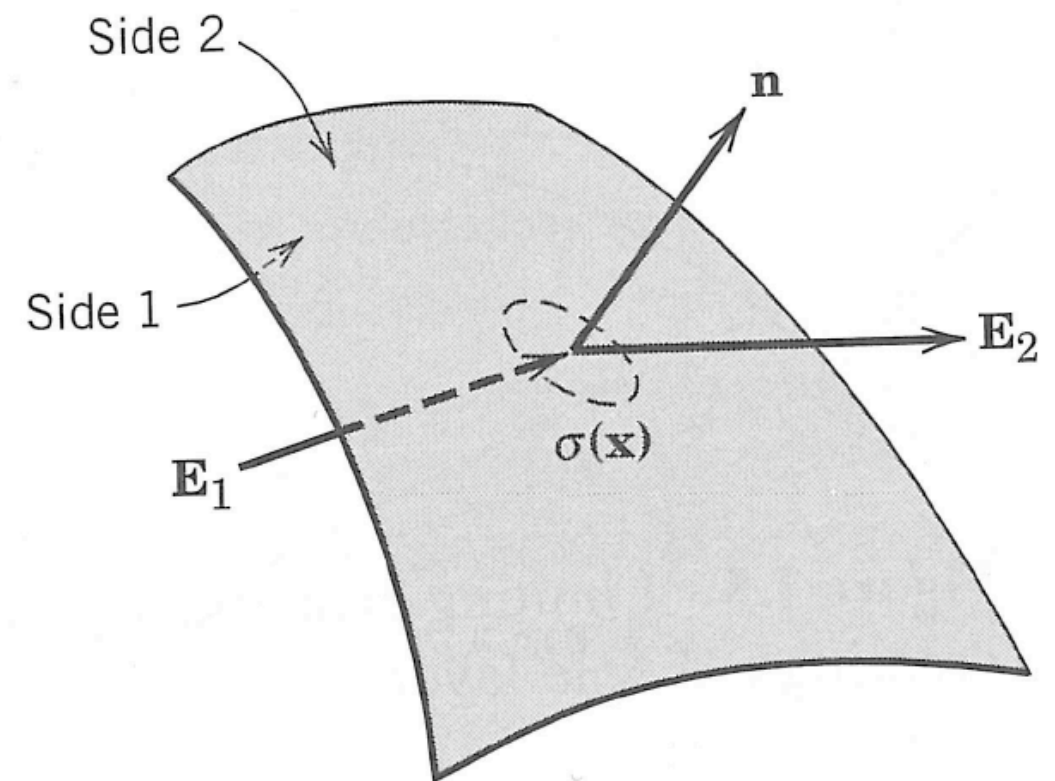
Gauß'sches Gesetz (Eine der Maxwell Gl.)

Anwendungen

$$\sigma(x)$$

Oberfläche-Ladungsdichte

$$(\vec{\mathbf{E}}_2 - \vec{\mathbf{E}}_1) \cdot \vec{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma$$



Noch eine Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = 0$$

Folgt aus $\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) \frac{\vec{r} - \vec{r}_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3}$

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3} = -\vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \right)$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}_r \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = -\vec{\nabla} \Phi$$

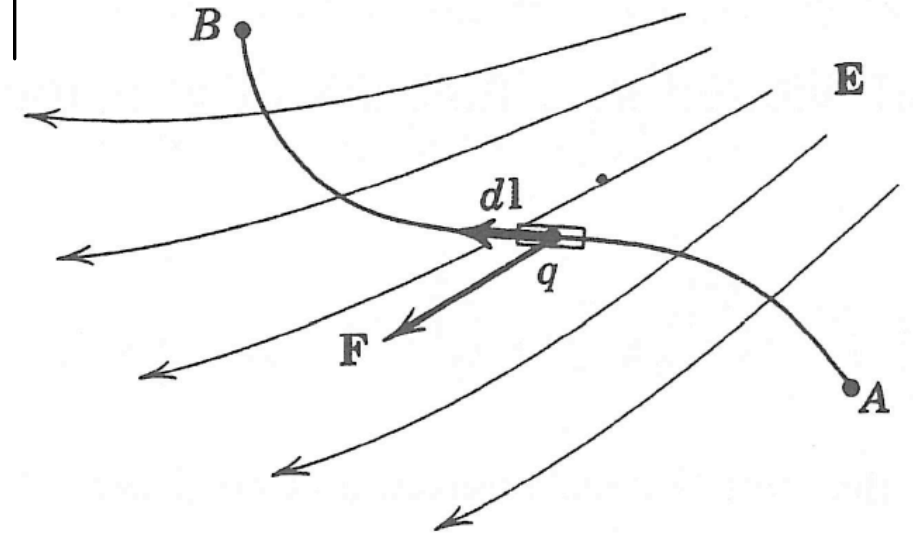
$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = 0$$

Skalarpotential

$$\Phi(\vec{r}) \equiv \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Mit $\vec{F} = q\vec{E}$ und $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$

$$W = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{\nabla}\Phi$$



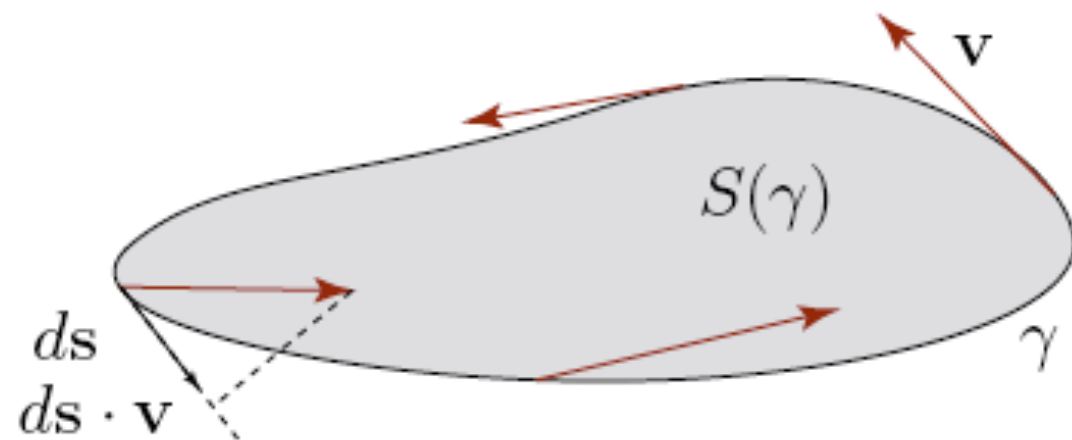
Die Arbeit die man machen muss um die Ladung q von A zu B zu bewegen

$$W = q \int_A^B \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{l} = q \int_A^B d\Phi = q(\Phi_B - \Phi_A)$$

$$U(\vec{r}) = q\Phi(\vec{r})$$

Potenzielle Energie

Stokes'sche Formel



$$\int_{\gamma} d\vec{s} \cdot \vec{v} = \int_{S(\gamma)} d\sigma \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = 0 \quad \rightarrow \quad \int_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = 0$$

$\vec{\mathbf{E}}$ - konservatives Feld

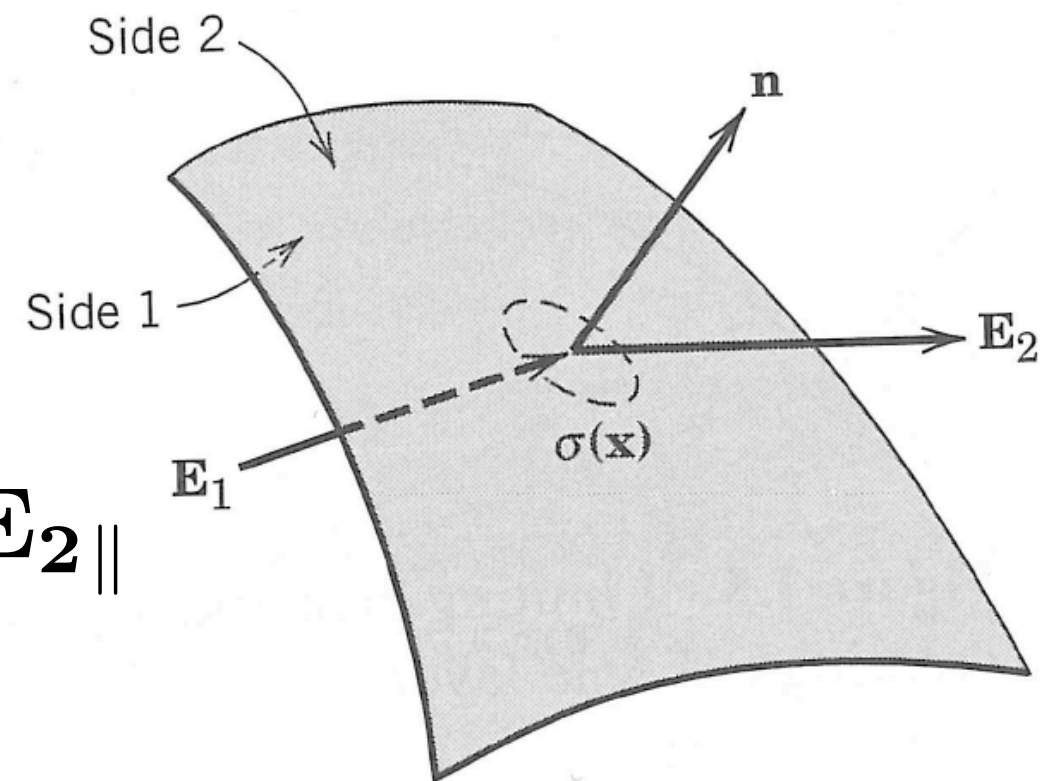
$$U(\vec{r}) = q\Phi(\vec{r}) \quad \text{Potenzielle Energie - gut definiert}$$

Anwendungen

$$\sigma(x)$$

Oberfläche-Ladungsdichte

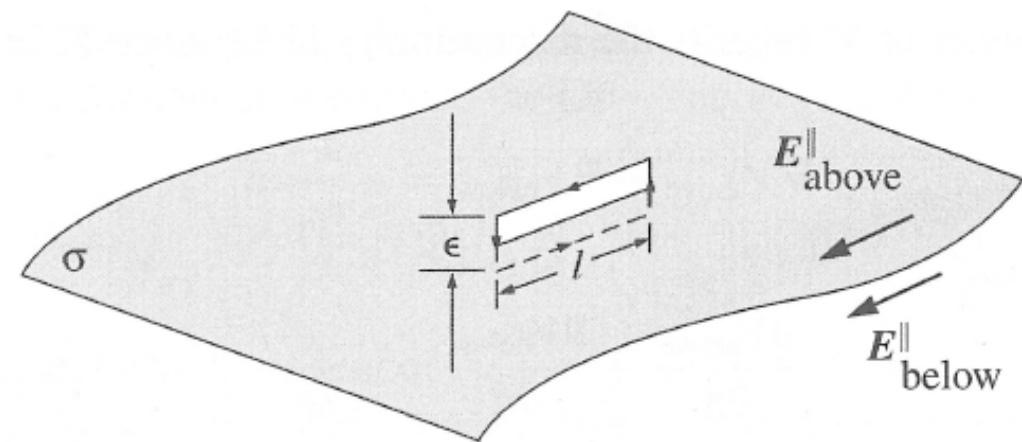
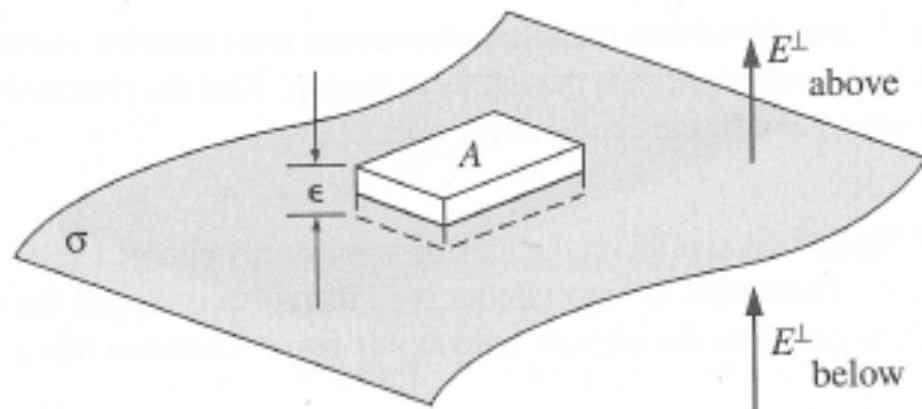
$$\int_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_{1\parallel} = \mathbf{E}_{2\parallel}$$



Auch (früher gezeigt)

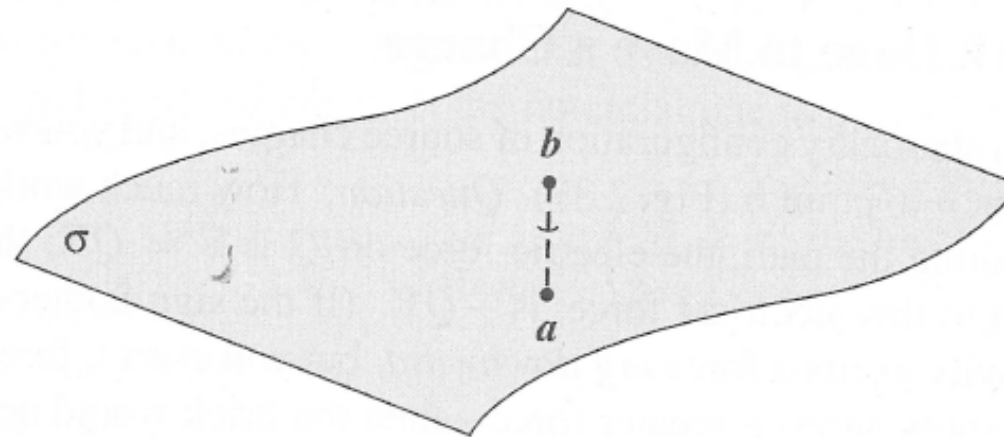
$$\int_S d\sigma (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) = 4\pi \int_{V(S)} dV \rho \quad \Rightarrow \quad (\vec{\mathbf{E}}_2 - \vec{\mathbf{E}}_1) \cdot \vec{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma$$

Randbedingungen, Zusammenfassung

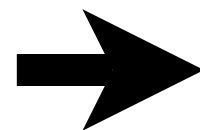


$$\mathbf{E}_{\text{above},\perp} - \mathbf{E}_{\text{below},\perp} = 4\pi\sigma$$

$$\mathbf{E}_{\text{above},\parallel} = \mathbf{E}_{\text{below},\parallel}$$



$$\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \Phi_b - \Phi_a$$



$$\Phi_{\text{above}} = \Phi_{\text{below}}$$

Kontinuierlich

Elektrostatische Energie

$$W_n = q_n \int_{\infty}^{\vec{r}_n} \vec{\nabla} \Phi_{n-1} \cdot d\vec{l} = q_n \Phi_{n-1}(\vec{r}_n) \quad \Phi_{n-1}(\infty) = 0$$

Die Arbeit die man machen muss um die n-te Ladung von unendlich zu bringen wenn es schon (n-1) Ladungen gibt

$$\Phi_{n-1}(\vec{r}_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_i}{|\vec{r}_n - \vec{r}_i|} \quad \text{Potential erzeugt von n-1 Ladungen}$$

$$W_{\Sigma} = \sum_n q_n \Phi_{n-1}(\vec{r}_n) = \sum_n \sum_{i < n} \frac{q_n q_i}{|\vec{r}_n - \vec{r}_i|} = \frac{1}{2} \sum_{\{i,n\}; i \neq n} \frac{q_n q_i}{|\vec{r}_n - \vec{r}_i|}$$

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_n q_n \Phi(\vec{r}_n) \quad \Phi(\vec{r}_n) = \sum_{i \neq n} \frac{q_i}{|\vec{r}_n - \vec{r}_i|}$$

Potential erzeugt von allen anderen Ladungen

Elektrostatische Energie für kontinuierlich verteilte Ladung

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_n q_n \Phi(\vec{r}_n) \rightarrow \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r})$$

mit $\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\Phi \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho \quad \longrightarrow \quad \nabla^2 \Phi = -4\pi\rho$$

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r (\nabla^2 \Phi) \Phi$$

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\vec{\nabla}\Phi) \cdot (\vec{\nabla}\Phi) = \frac{1}{8\pi} \int d^3r |\vec{\mathbf{E}}|^2$$

Problem der unendlichen Selbstenergie

$$W_{\Sigma}^{\text{kont.}} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r |\vec{\mathbf{E}}|^2 \geq 0 \quad \text{Immer positive}$$

$$W_{\Sigma}^{\text{diskr.}} = \frac{1}{2} \sum_{\{i,n\}; i \neq n} \frac{q_n q_i}{|\vec{r}_n - \vec{r}_i|} \quad \text{Kann positive oder negative sein}$$

$$W_{\Sigma}^{\text{kont.}} = \frac{1}{2} \int \int d^3r_1 d^3r_2 \frac{\rho(\vec{r}_1) \rho(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{2} \sum_{i,n} \frac{q_n q_i}{|\vec{r}_n - \vec{r}_i|} \quad \text{doch } i=n$$

Enthält unendliche Selbstenergie

Das ist die Energie die man braucht um eine Punktladung zu erzeugen. Kein Problem bei der “verschmierten” Ladungen.

Wenn die Punktladungen gegeben sind - eine unendliche Konstante - kein Problem.
Doch ein Problem das auch in der Quantenelektrodynamik gibt.

Poisson-Gleichung und Laplace-Gleichung

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\Phi \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho \quad \rightarrow \quad \nabla^2\Phi = -4\pi\rho$$

Poisson-Gleichung

$$\rho = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2\Phi = 0$$

Laplace-Gleichung

Für gegebene Ladungsdichte die Lösung der Poisson-Gleichung lautet

$$\Phi(\vec{r}) \equiv \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \quad \nabla^2 \Phi = -4\pi \rho$$



$$\nabla_r^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \right) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

Problem: die Ladungsdichte ist nicht immer gegeben

Elektrische Leiter (Metalle)

Im Innen des Metalls gilt

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = 0 \qquad \Phi = \text{const.}$$

Induzierte Ladungen auf der Oberfläche

Dirichlet Randbedingung $\Phi(\vec{r}_a)$ für $\vec{r}_a \in S$ gegeben

Dirichlet Randbedingung $\Phi(\vec{r}_a)$ für $\vec{r}_a \in S$ gegeben

Neumann Randbedingung $\frac{\partial \Phi(\vec{r}_a)}{\partial n_a}$ für $\vec{r}_a \in S$ gegeben

Cauchy Randbedingung $\frac{\partial \Phi(\vec{r}_a)}{\partial n_a}$ und $\Phi(\vec{r}_a)$ für $\vec{r}_a \in S$ gegeben

Green'sche Identitäten

$$\int_S d\sigma (\vec{v} \cdot \vec{n}) = \int_{V(S)} dV (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{v} = \phi \vec{\nabla} \psi \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \phi \nabla^2 \psi$$

I-ste Green'sche Identität

$$\int_S d\sigma \phi (\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n}) = \int_{V(S)} dV (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \phi \nabla^2 \psi)$$

$$\int_S d\sigma \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} = \int_{V(S)} dV (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \phi \nabla^2 \psi) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} \equiv \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n}$$

1-ste Green'sche Identität

$$\int_S d\sigma \, \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} = \int_{V(S)} dV \, (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \phi \nabla^2 \psi) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} \equiv \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n}$$

2-te Green'sche Identität $\psi \leftrightarrow \phi$

$$\int_S d\sigma \, \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) = \int_{V(S)} dV \, (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi)$$

Green'sche Funktion

$$\nabla_r^2 G(\vec{r}, \vec{r}_a) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

auch

$$\nabla_{r_a}^2 G(\vec{r}, \vec{r}_a) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

Zum Beispiel

$$G(\vec{r}, \vec{r}_a) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\nabla_r^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \right) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

Aber auch

$$G(\vec{r}, \vec{r}_a) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} + F(\vec{r}, \vec{r}_a) \quad \text{wenn} \quad \nabla_r^2 F(\vec{r}, \vec{r}_a) = 0$$

Lösung mit Dirichlet Randbedingung

$$\int_S d\sigma \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) = \int_{V(S)} dV (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi)$$

$$\phi(\vec{r}_a) = \Phi(\vec{r}_a) \qquad \psi(\vec{r}_a) = G(\vec{r}, \vec{r}_a)$$

$$\int_S d\sigma_a \left(\Phi(\vec{r}_a) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_a)}{\partial n_a} - G(\vec{r}, \vec{r}_a) \frac{\partial \Phi(\vec{r}_a)}{\partial n_a} \right) = \int_{V(S)} dV_a (\Phi(\vec{r}_a)(-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)) - G(\vec{r}, \vec{r}_a)(-4\pi\rho(\vec{r}_a)))$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{V(S)} dV_a G(\vec{r}, \vec{r}_a) \rho(\vec{r}_a) + \frac{1}{4\pi} \int_S d\sigma_a \left(\Phi(\vec{r}_a) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_a)}{\partial n_a} - G(\vec{r}, \vec{r}_a) \frac{\partial \Phi(\vec{r}_a)}{\partial n_a} \right)$$

Für Dirichlet Randbedingung wir wollen $G(\vec{r}, \vec{r}_a) = 0$ für $r_a \in S$

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Randwert-Probleme der Elektrostatik

Poisson-Gleichung und Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{Laplace-Gleichung}$$
$$\rho = 0$$

Für (im ganzen Raum) gegebene Ladungsdichte die Lösung der Poisson-Gleichung lautet

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho$$

$$\Phi(\vec{r}) \equiv \int d^3 r_a \rho(\vec{r}_a) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

für $\rho(\vec{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ gilt $\Phi \rightarrow 0$

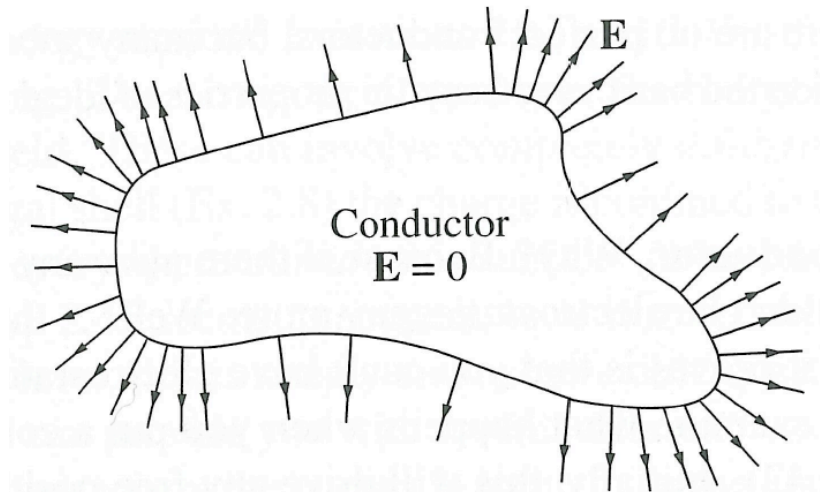
Dirichlet-Randbedingung auf der “unendlichen Oberfläche”

Problem: die Ladungsdichte ist nicht immer gegeben

Elektrische Leiter (Metalle)

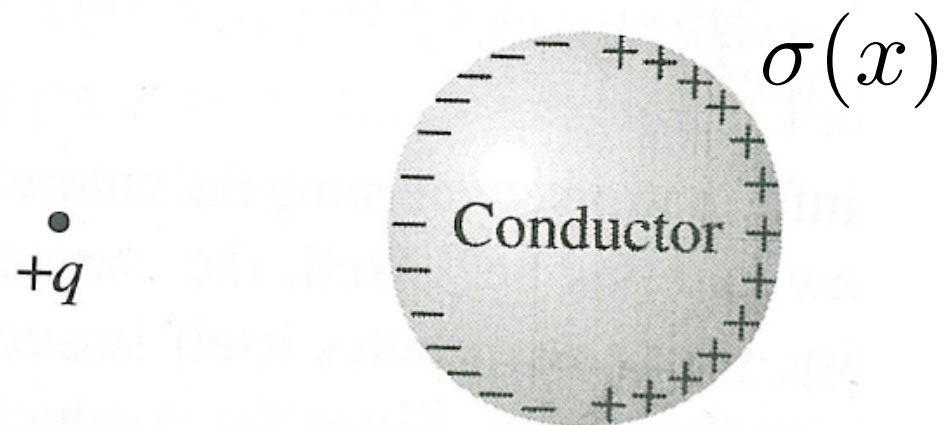
Im Innen des Metalls gilt

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = 0 \quad \Phi = \text{const.}$$



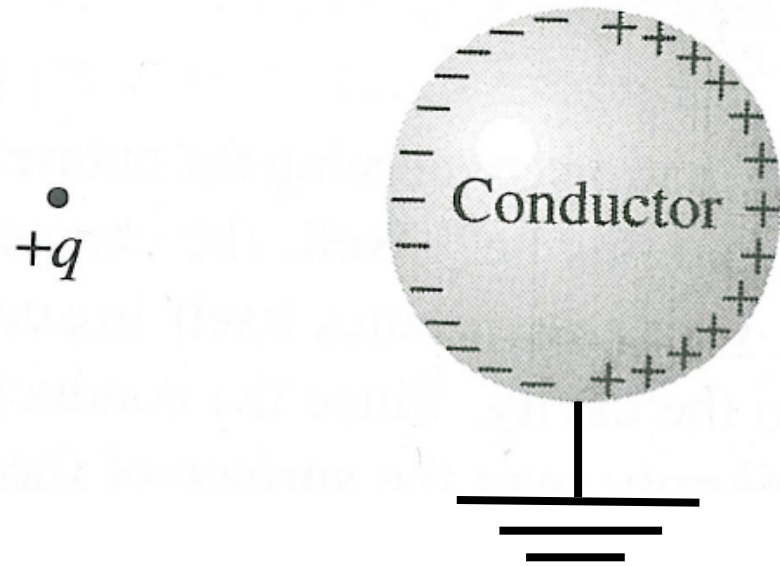
$$\mathbf{E}_{\perp}(x) = 4\pi\sigma(x)$$

Induzierte Ladungen auf der Oberfläche



Die Oberfläche-Ladungsdichte nicht bekannt,
muss bestimmt werden

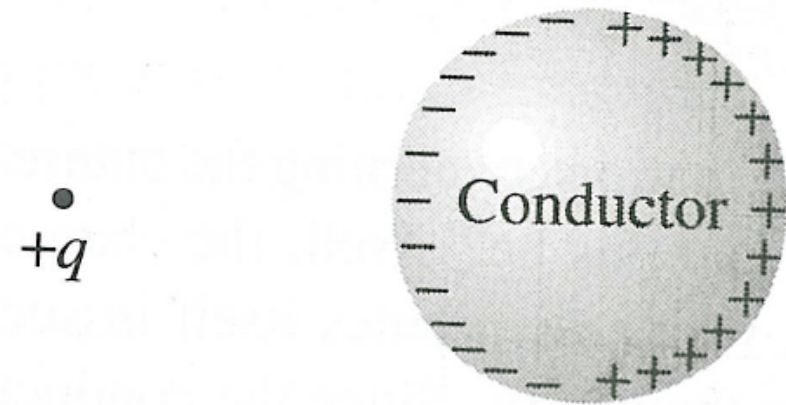
Zwei Fälle



Dirichlet Randbedingung

$$\Phi(\vec{r}_a) = \Phi_0 \text{ für } \vec{r}_a \in S$$

Φ_0 ist bekannt



Dirichlet Randbedingung

$$\Phi(\vec{r}_a) = \Phi_0 \text{ für } \vec{r}_a \in S$$

Φ_0 ist unbekannt, aber

$$Q = \int_S \sigma(\vec{r}_a) ds \quad \text{ist gegeben}$$

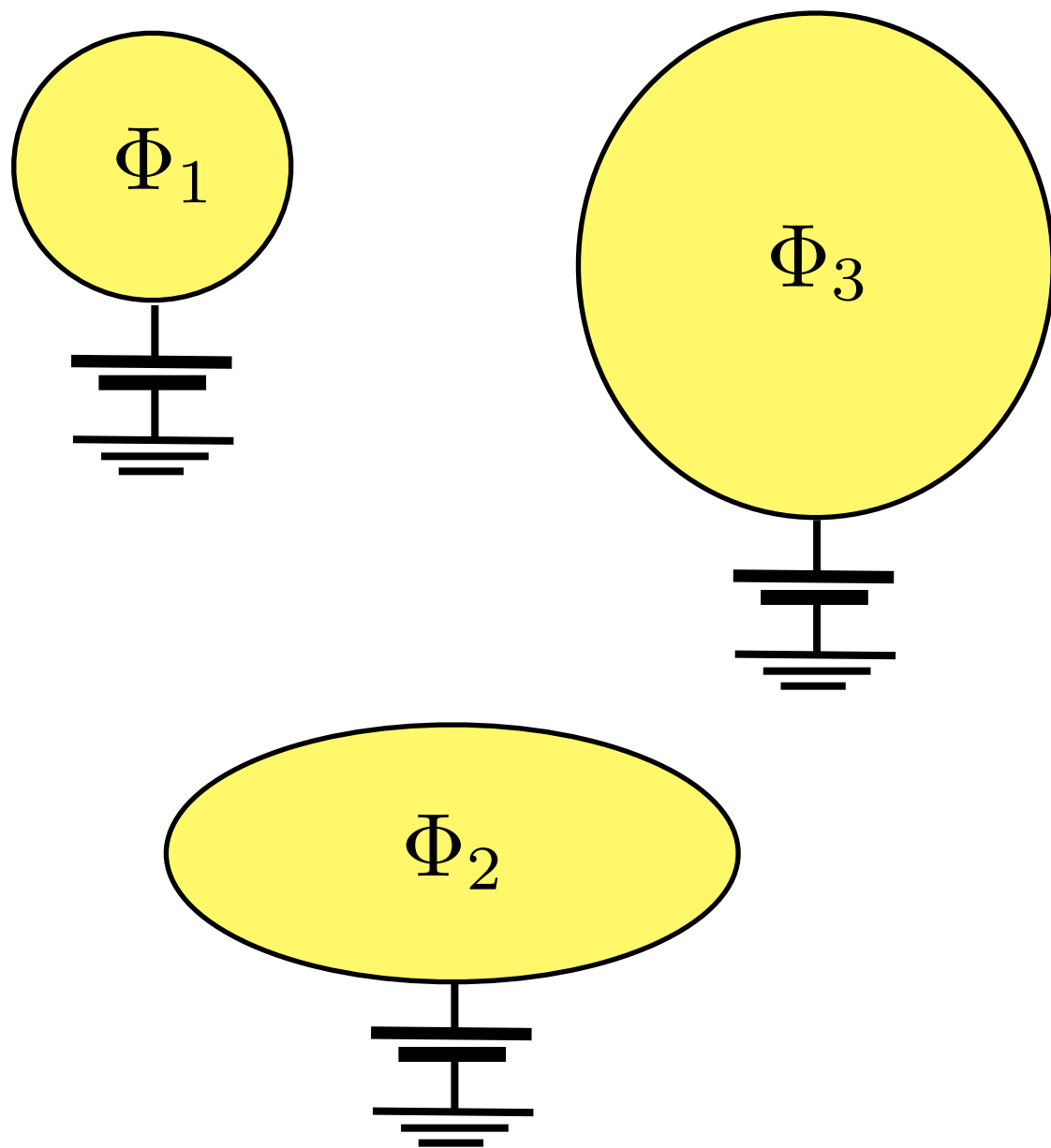
Algorithmus:

a) Löse mit beliebigen Φ_0 ,

b) Finde $\sigma[\Phi_0]$,

c) Löse $Q = \int_S \sigma[\Phi_0] ds$

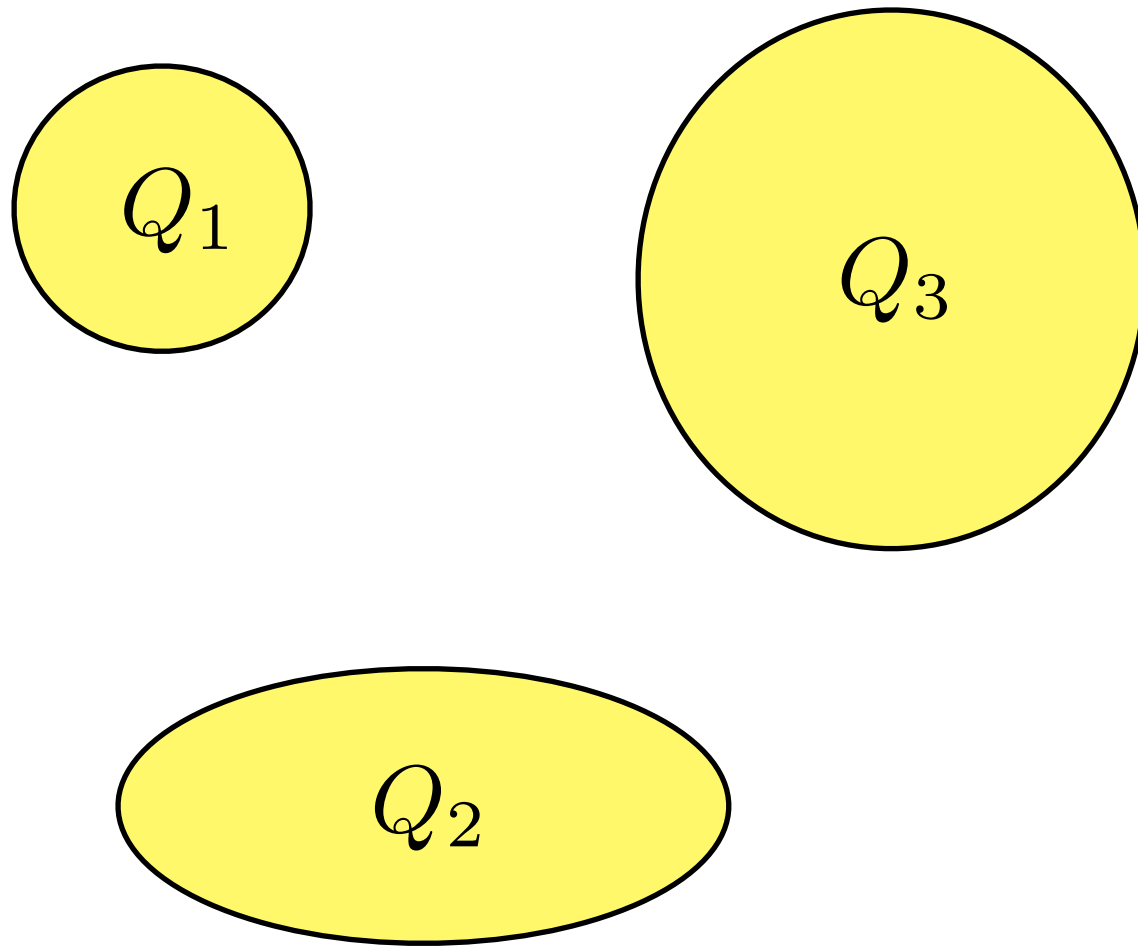
Matrix der Kapazitäten



$$Q_i = \sum_j C_{ij} \Phi_j$$

C_{ij} wird bestimmt durch Lösung
des Randwert-Problems

Matrix der Kapazitäten



$$Q_i = \sum_j C_{ij} \Phi_j$$

$$\Phi_i = \sum_j C_{ij}^{-1} Q_j$$

Elektrostatische Energie

$$W_\Sigma = \frac{1}{2} \sum_n q_n \Phi(\vec{r}_n) \rightarrow \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \Phi_i$$

$$W_\Sigma = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij}^{-1} Q_i Q_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} \Phi_i \Phi_j$$

Green'sche Funktion

$$\nabla_r^2 G(\vec{r}, \vec{r}_a) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

auch

$$\nabla_{r_a}^2 G(\vec{r}, \vec{r}_a) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

Zum Beispiel

$$G(\vec{r}, \vec{r}_a) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\nabla_r^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \right) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

Aber auch

$$G(\vec{r}, \vec{r}_a) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} + F(\vec{r}, \vec{r}_a) \quad \text{wenn} \quad \nabla_r^2 F(\vec{r}, \vec{r}_a) = 0$$

Spezifische Green-Funktionen werden durch Randbedingungen bestimmt

Lösung mit Dirichlet Randbedingung

2-te Green'sche Identität

$$\int_S ds \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) = \int_{V(S)} dV (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi)$$

Wir wählen

$$\phi(\vec{r}_a) = \Phi(\vec{r}_a) \qquad \psi(\vec{r}_a) = G(\vec{r}, \vec{r}_a)$$

$$\int_S ds_a \left(\Phi(\vec{r}_a) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_a)}{\partial n_a} - G(\vec{r}, \vec{r}_a) \frac{\partial \Phi(\vec{r}_a)}{\partial n_a} \right) = \int_{V(S)} dV_a (\Phi(\vec{r}_a)(-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)) - G(\vec{r}, \vec{r}_a)(-4\pi\rho(\vec{r}_a)))$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{V(S)} dV_a G(\vec{r}, \vec{r}_a) \rho(\vec{r}_a) + \frac{1}{4\pi} \int_S ds_a \left(\Phi(\vec{r}_a) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_a)}{\partial n_a} - G(\vec{r}, \vec{r}_a) \frac{\partial \Phi(\vec{r}_a)}{\partial n_a} \right)$$

Für Dirichlet Randbedingung wir wollen $G(\vec{r}, \vec{r}_a) = 0$ für $r_a \in S$

Lösung des Dirichlet-Problems

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{V(S)} dV_a G(\vec{r}, \vec{r}_a) \rho(\vec{r}_a) + \frac{1}{4\pi} \int_S ds_a \Phi(\vec{r}_a) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_a)}{\partial n_a}$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}_a) = 0 \text{ für } r_a \in S$$

Spezieller Fall

$$\Phi(\vec{r}) \equiv \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \longrightarrow G(\vec{r}, \vec{r}_a) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}_a) = 0 \text{ für } r_a \rightarrow \infty$$

Dirichlet-Randbedingung auf der “unendlichen Oberfläche”

Lösung des Dirichlet-Problems ist
eindeutlich

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho$$

$$\Phi(\vec{r}_a) \text{ gegeben für } \vec{r}_a \in S$$

Nehmen wir an, dass es zwei Lösungen gibt: Φ_1 und Φ_2

Für $U \equiv \Phi_1 - \Phi_2$ gilt

$$\nabla^2 U = 0$$

$$U(\vec{r}_a) = 0 \text{ für } \vec{r}_a \in S$$

$$\nabla^2 U = 0$$

$$U(\vec{r}_a) = 0 \text{ für } \vec{r}_a \in S$$

I-ste Green'sche Identität

$$\int_S ds \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} = \int_{V(S)} dV (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \phi \nabla^2 \psi) \quad \text{mit} \quad \phi = \psi = U$$

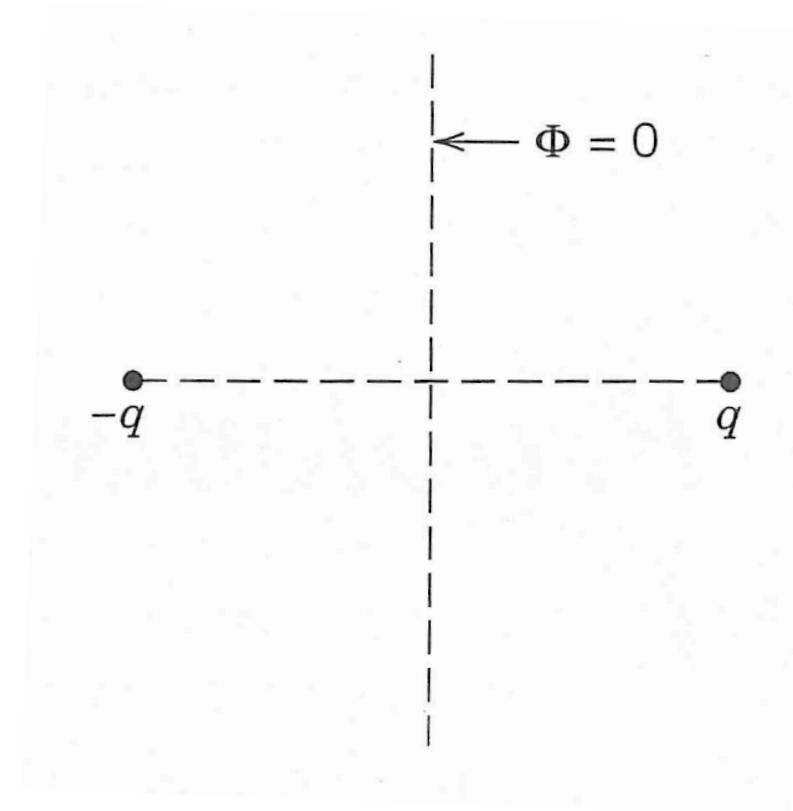
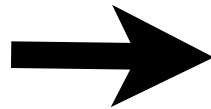
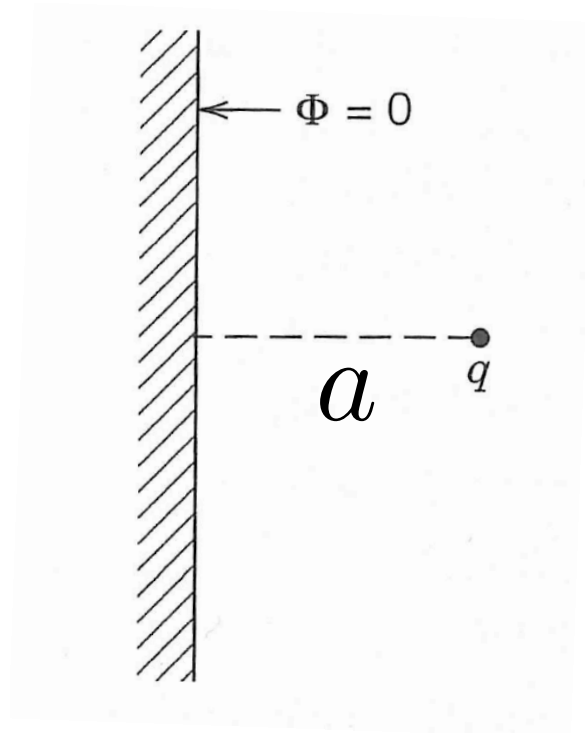
$$\int_S ds U \frac{\partial U}{\partial n} = \int_{V(S)} dV (\vec{\nabla} U \cdot \vec{\nabla} U + U \nabla^2 U) \longrightarrow \int_{V(S)} dV |\vec{\nabla} U|^2 = 0$$

$$U = \text{const.} = 0$$

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

Ähnlich für Neumann-Randbedingung

Methode der Bildladungen



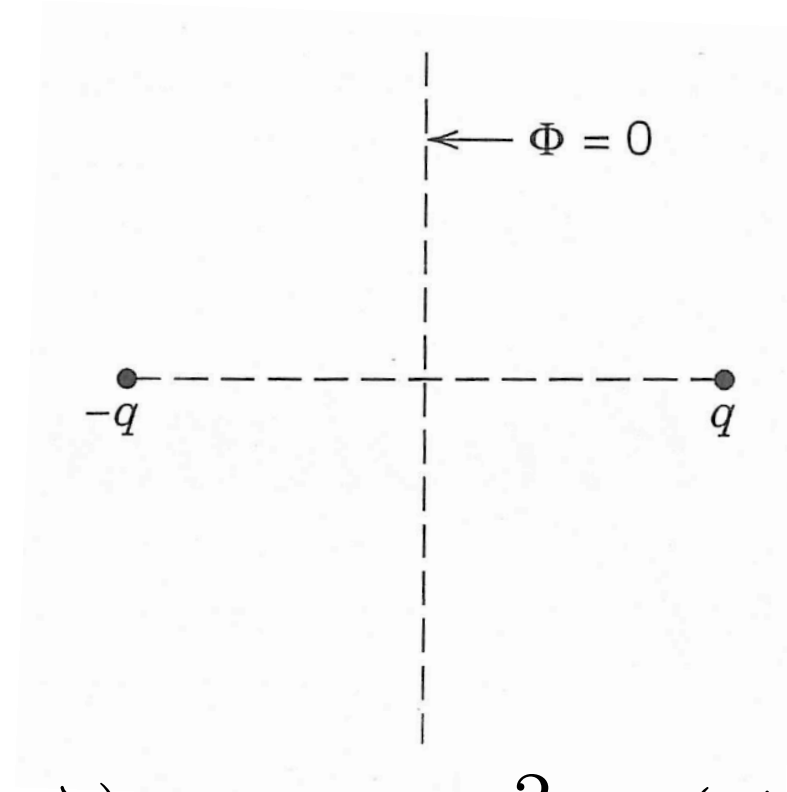
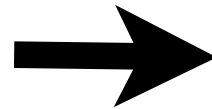
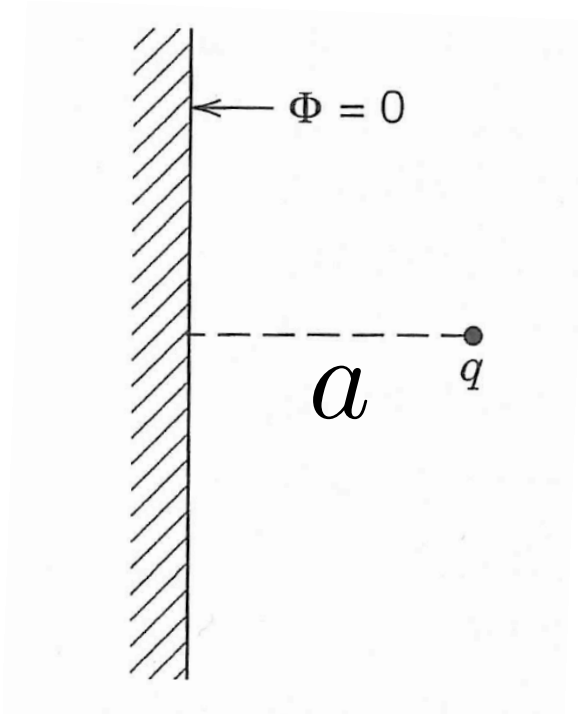
$$\Phi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{(-q)}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}$$

$$\vec{r}_1 = (a, 0, 0)$$

$$\vec{r}_2 = (-a, 0, 0)$$

Methode der Bildladungen: Green'sche Funktion



$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + F(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$$\nabla_{\vec{r}_1}^2 F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

$$x_1 > 0 \text{ and } x_2 > 0 \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

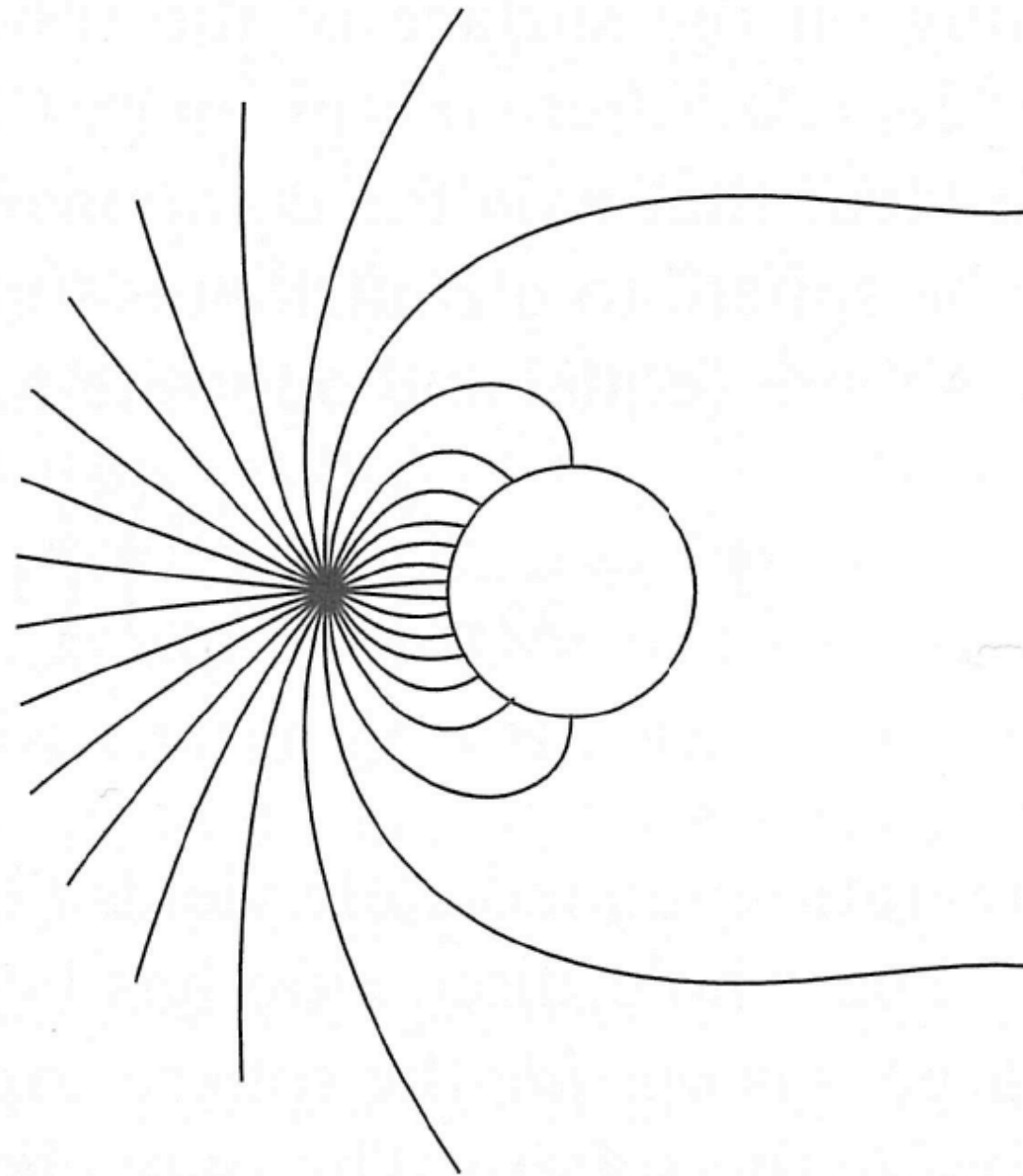
$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0 \text{ für } x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0$$

Lösung

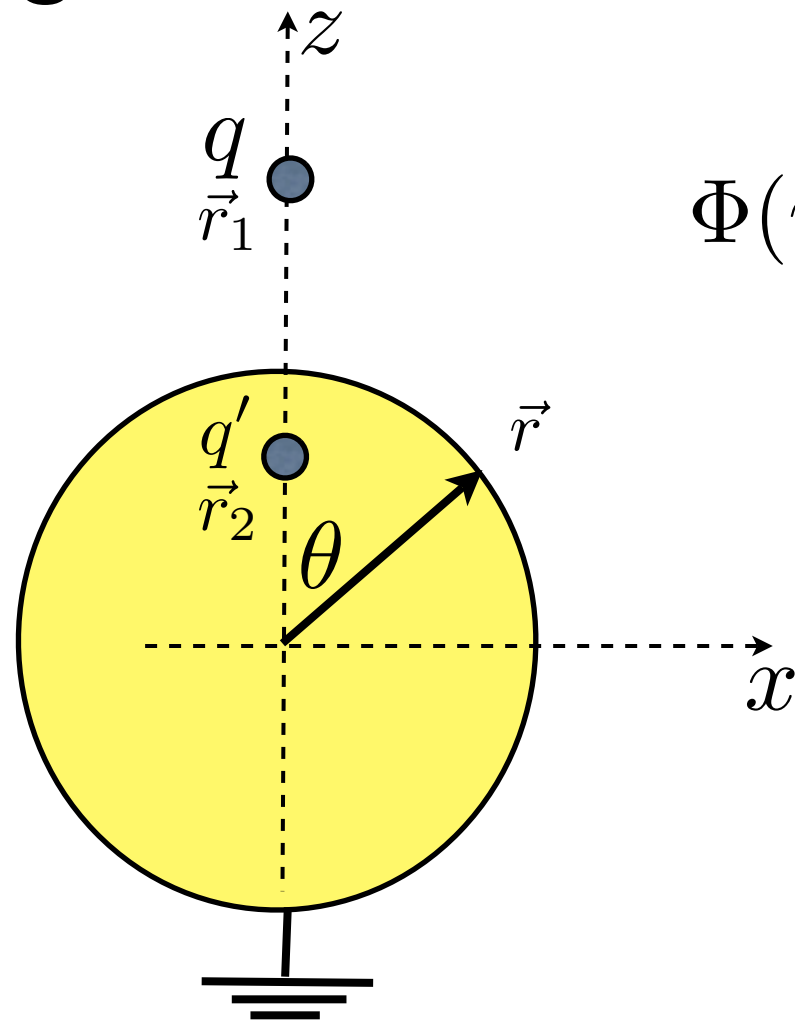
$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

Methode der Bildladungen

Punktladung und metallische Kugel



Punktladung und metallische Kugel mit $\Phi = 0$



$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}$$

$$\vec{r}_1 = (0, 0, a)$$

$$\vec{r}_2 = (0, 0, b)$$

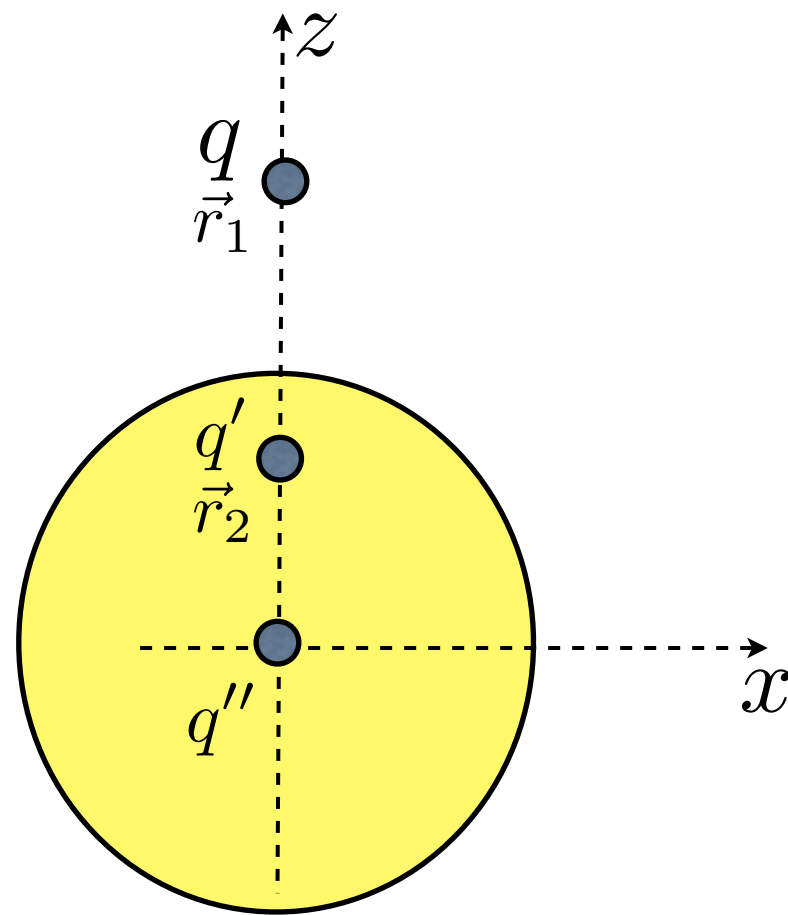
$$\Phi(|\vec{r}| = R) = \frac{q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb \cos \theta}} = 0$$

$$\frac{q}{a\sqrt{(R/a)^2 + 1 - 2(R/a) \cos \theta}} + \frac{q'}{R\sqrt{1 + (b/R)^2 - 2(b/R) \cos \theta}} = 0$$

$$q' = -\frac{Rq}{a}$$

$$b = \frac{R^2}{a}$$

Punktladung und isolierte metallische Kugel mit Ladung Q



$$\vec{r}_1 = (0, 0, a)$$

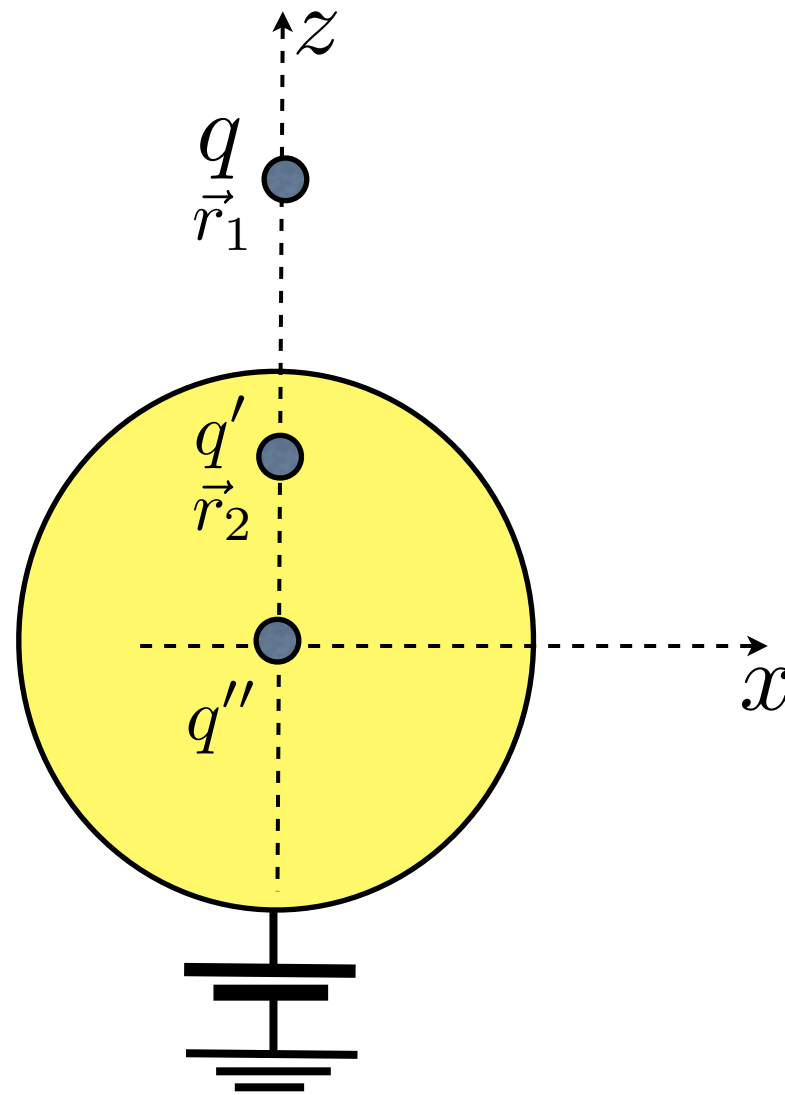
$$\vec{r}_2 = (0, 0, b)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + \frac{q''}{|\vec{r}|}$$

$$q' = -\frac{Rq}{a} \quad b = \frac{R^2}{a} \quad q'' = Q - q'$$

$$\Phi = \Phi(|\vec{r}| = R) = \frac{q''}{R}$$

Punktladung und metallische Kugel mit $\Phi \neq 0$



$$\vec{r}_1 = (0, 0, a)$$

$$\vec{r}_2 = (0, 0, b)$$

$$q' = -\frac{Rq}{a}$$

$$b = \frac{R^2}{a}$$

$$q'' = Q - q'$$

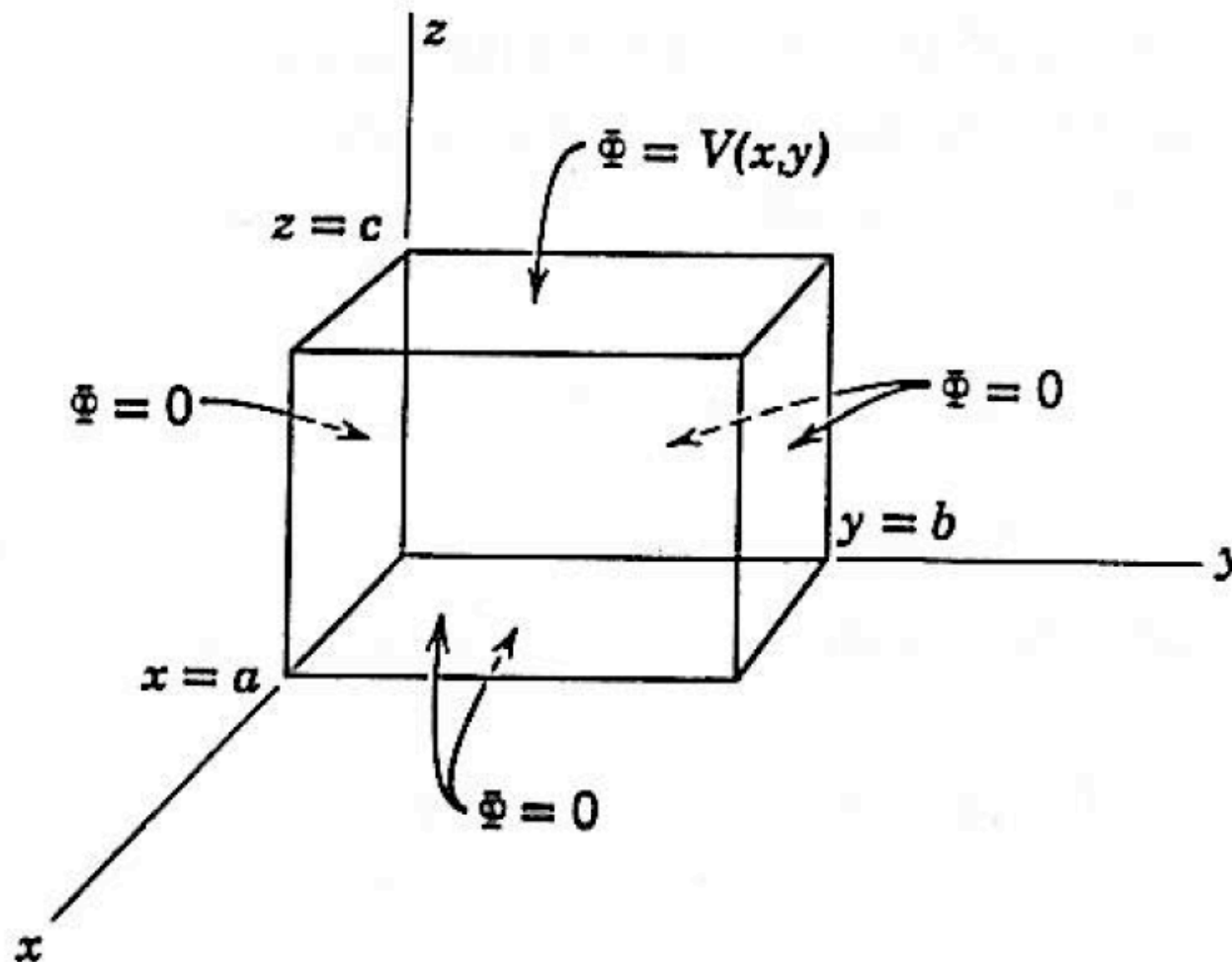
$$\Phi = \Phi(|\vec{r}| = R) = \frac{q''}{R} = \frac{Q - q'}{R} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} q'' &= R\Phi \\ Q &= q' + q'' \end{aligned}$$

Separation der Variablen

Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

$$\rho = 0$$



Separation der Variablen

Ansatz

$$\Phi(x, y, z) = A(x)B(y)C(z)$$

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} B(y)C(z) + \frac{\partial^2 B(y)}{\partial y^2} A(x)C(z) + \frac{\partial^2 C(z)}{\partial z^2} A(x)B(y) = 0$$

Teilen durch $\Phi = ABC$

$$\frac{1}{A(x)} \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{B(y)} \frac{\partial^2 B(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{C(z)} \frac{\partial^2 C(z)}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{A(x)} \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} = \alpha^2$$

$$\frac{1}{B(y)} \frac{\partial^2 B(y)}{\partial y^2} = \beta^2$$

$$\frac{1}{C(z)} \frac{\partial^2 C(z)}{\partial z^2} = \gamma^2$$

$$\text{und} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

Separation der Variablen

$$\frac{1}{A(x)} \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} = \alpha^2$$

$$\frac{1}{B(y)} \frac{\partial^2 B(y)}{\partial y^2} = \beta^2$$

$$\frac{1}{C(z)} \frac{\partial^2 C(z)}{\partial z^2} = \gamma^2$$

und $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$

$$A(x) = e^{\pm \alpha x}$$

$$B(y) = e^{\pm \beta y}$$

$$C(z) = e^{\pm \gamma z}$$

$$A(x=0) = 0 \rightarrow A(x) \propto e^{\alpha x} - e^{-\alpha x} \propto \sinh(\alpha x)$$

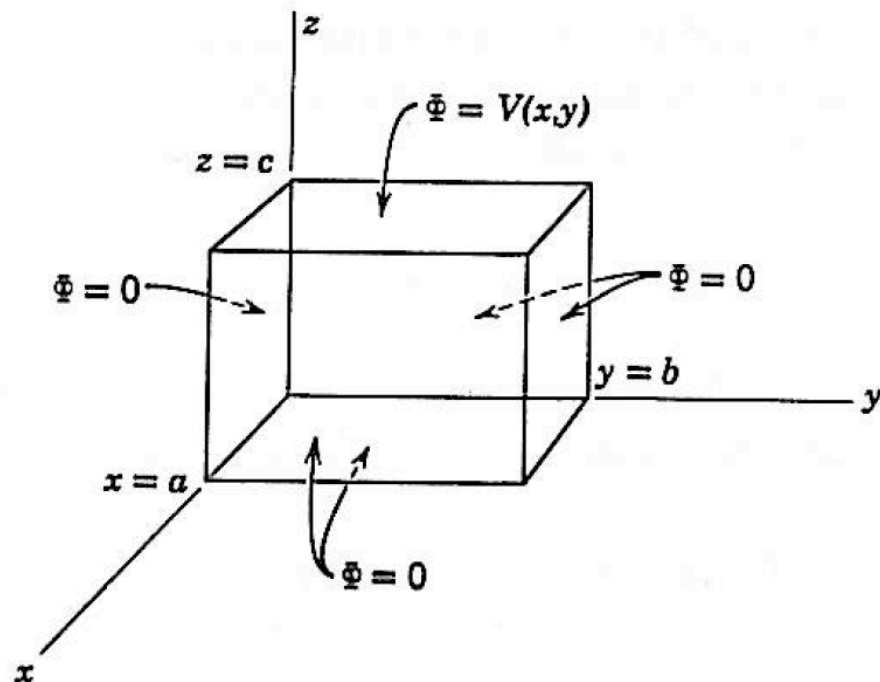
$$B(y=0) = 0 \rightarrow B(y) \propto e^{\beta y} - e^{-\beta y} \propto \sinh(\beta y)$$

$$C(z=0) = 0 \rightarrow C(z) \propto e^{\gamma z} - e^{-\gamma z} \propto \sinh(\gamma z)$$

$$A(x=a) = 0 \rightarrow \alpha_n = \frac{in\pi}{a} \rightarrow A(x) \propto \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

$$B(y=b) = 0 \rightarrow \beta_m = \frac{im\pi}{b} \rightarrow B(y) \propto \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right)$$

$$\gamma^2 = -\alpha^2 - \beta^2 \rightarrow \gamma_{nm} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$



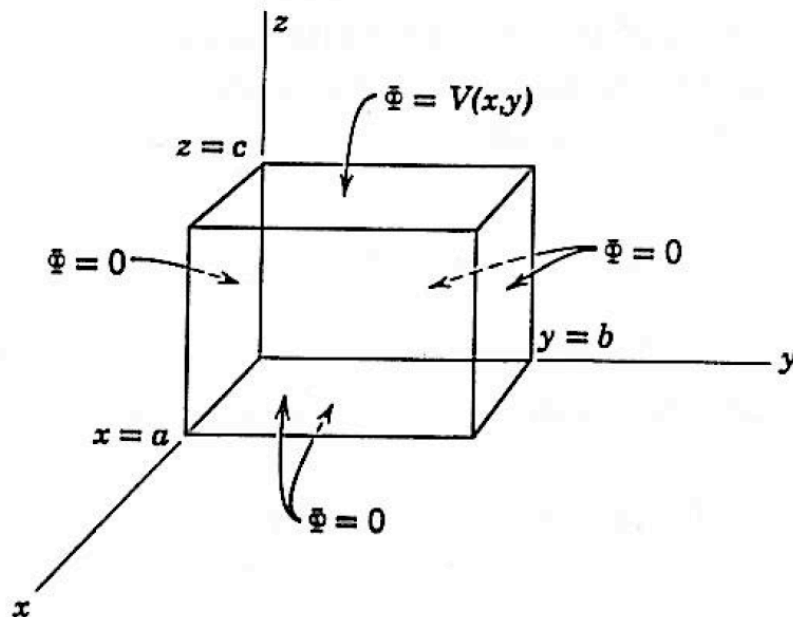
Separation der Variablen

Allgemeine Lösung

$$\Phi = \sum_{n,m=1}^{\infty} D_{n,m} \sin\left(x \frac{n\pi}{a}\right) \sin\left(y \frac{m\pi}{b}\right) \sinh\left(z\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\right)$$

Noch eine Randbedingung

$$\Phi(z=c) = \sum_{n,m=1}^{\infty} D_{n,m} \sin\left(x \frac{n\pi}{a}\right) \sin\left(y \frac{m\pi}{b}\right) \sinh\left(c\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\right) = V(x,y)$$



2-D Fourier

$$D_{n,m} = \frac{4}{ab \sinh\left(c\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\right)} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x,y) \sin\left(x \frac{n\pi}{a}\right) \sin\left(y \frac{m\pi}{b}\right)$$

Generell: Entwicklung in Basis der
orthonormalen Funktionen

$$\Phi = \sum_i D_i \Phi_i(x, y, z)$$

$$\int d^3r \Phi_i \Phi_j = \delta_{ij}$$

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Randwert-Probleme der Elektrostatik

Kugel-Koordinaten

Poisson-Gleichung und Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{Laplace-Gleichung}$$
$$\rho = 0$$

Kugel-Koordinaten

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\Phi(x, y, z) \rightarrow \Phi(r, \theta, \varphi)$$

In Kugel-Koordinaten Lautet der Laplace-Operator

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

Laplace-Operator in Kugel-Koordinaten

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

Ansatz (Separation der Variablen)

$$\Phi = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{d^2 U}{dr^2} P Q + \frac{U}{r} Q \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{U}{r} P \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0$$

Multiplizieren mit $\frac{r^3 \sin^2 \theta}{UPQ}$

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{P} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0$$

Separation der Variablen

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{P} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0$$

nur φ abhängig

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2 \longrightarrow Q = e^{\pm im\varphi}$$

Für Eindeutlichkeit muss $m \in \mathbb{N}$

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{P} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] - m^2 = 0$$

$$\frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0$$

nur r abhängig nur θ abhängig

Separation der Variablen

$$\frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0$$

nur r abhängig

nur θ abhängig

$$\frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} = l(l + 1)$$

$$\frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -l(l + 1)$$

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l + 1)}{r^2} U = 0$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[l(l + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0$$

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0$$

$$x \equiv \cos \theta \quad P(\theta) \rightarrow P(x) = P(\cos \theta)$$



$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0$$

$$U = A r^{l+1} + B r^{-l} \quad \text{allgemeine Lösung}$$

Erst $m = 0$ ($Q(\varphi) = 1$, Φ ist φ unabhängig)

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + l(l + 1)P = 0$$

Legendre-Polynome

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

$$l = 0, 1, 2, 3\ldots \quad \text{Rodriguez-Formel}$$

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l + 1} \delta_{l,l'}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

Allgemein $m \neq 0$

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] P = 0$$

Zugeordnete Legendre-Polynome

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad \text{für } m \geq 0$$

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l - m)!}{(l + m)!} P_l^m(x)$$

oder

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l$$

$$l = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$$

$$\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l + 1} \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \delta_{l, l'}$$

Kugelfunktionen

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \varphi)$$

Kugelfunktionen bilden eine vollständige orthonormale Basis

$$\int d\Omega Y_{l,m}(\theta, \varphi) Y_{l',m'}^*(\theta, \varphi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}$$

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{l,m}(\theta, \varphi) Y_{l',m'}^*(\theta, \varphi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}$$

Kugel-Funktionen

$$l = 0 \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$l = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \end{array} \right.$$

$$l = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi} \\ Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} \\ Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \end{array} \right.$$

$$l = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{33} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{35}{4\pi}} \sin^3 \theta e^{3i\phi} \\ Y_{32} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{2i\phi} \\ Y_{31} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{21}{4\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{i\phi} \\ Y_{30} = \sqrt{\frac{7}{4\pi}} \left(\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \right) \end{array} \right.$$

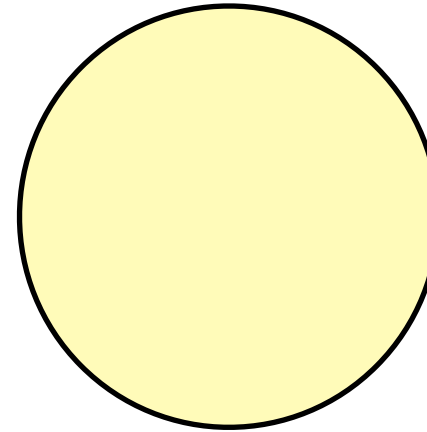
Allgemeine Lösung der Laplace Gleichung

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0 \quad \longrightarrow \quad U = A r^{l+1} + B r^{-l}$$

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} \cdot r^l + B_{lm} \cdot r^{-(l+1)} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Randwert-Problem: Beispiel

$$\Phi(R, \theta, \varphi) = V(\theta, \varphi)$$



$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} \cdot r^l + B_{lm} \cdot r^{-(l+1)} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Koeffizienten A und B können bestimmt werden mit Hilfe

$$\int d\Omega Y_{l,m}(\theta, \varphi) Y_{l',m'}^*(\theta, \varphi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}$$

Multipol Entwicklung

Für (im ganzen Raum) gegebene Ladungsdichte die Lösung der Poisson-Gleichung lautet

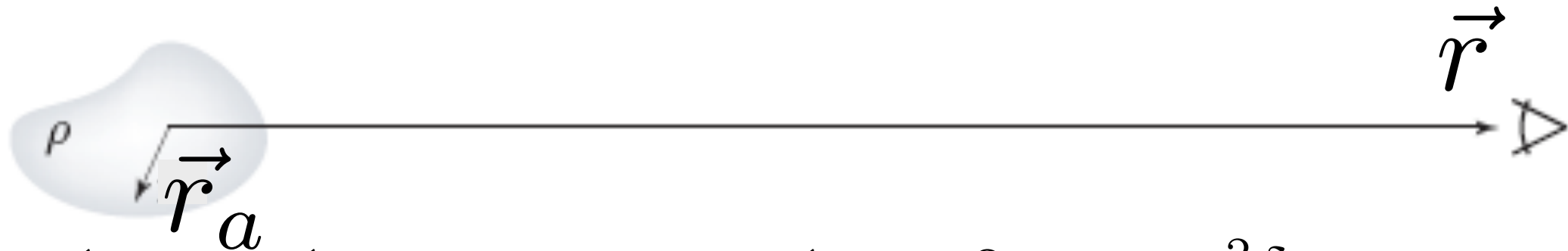
$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3 r_a \rho(\vec{r}_a) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$



In kartesischen Koordinaten

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$



$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = \frac{1}{r} + \sum_i \frac{r_i}{r^3} r_{a,i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} r_{a,i} r_{a,j} + \dots$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = \frac{1}{r} + \sum_i \frac{r_i}{r^3} r_{a,i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5} (3r_{a,i} r_{a,j} - r_a^2 \delta_{ij}) + \dots$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{r} Q^{(0)} + \sum_i \frac{r_i}{r^3} Q_i^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5} Q_{ij}^{(2)} + \dots$$

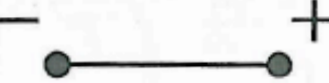
$$Q^{(0)} = \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) \quad Q_i^{(1)} = \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) r_{a,i} \quad Q_{ij}^{(2)} = \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) (3r_{a,i} r_{a,j} - r_a^2 \delta_{ij})$$

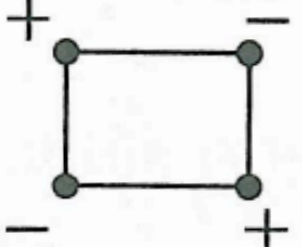
Monopol

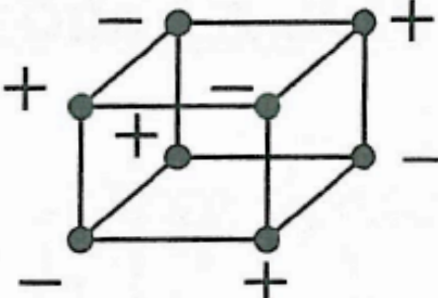
Dipol

Quadrupol

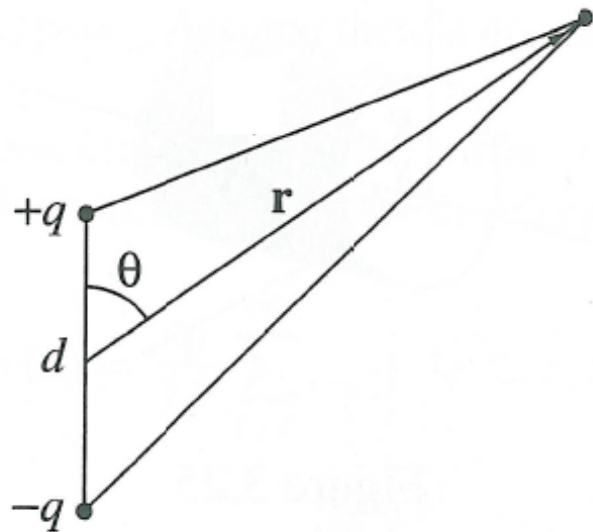

Monopole
($V \sim 1/r$)


Dipole
($V \sim 1/r^2$)


Quadrupole
($V \sim 1/r^3$)


Octopole
($V \sim 1/r^4$)

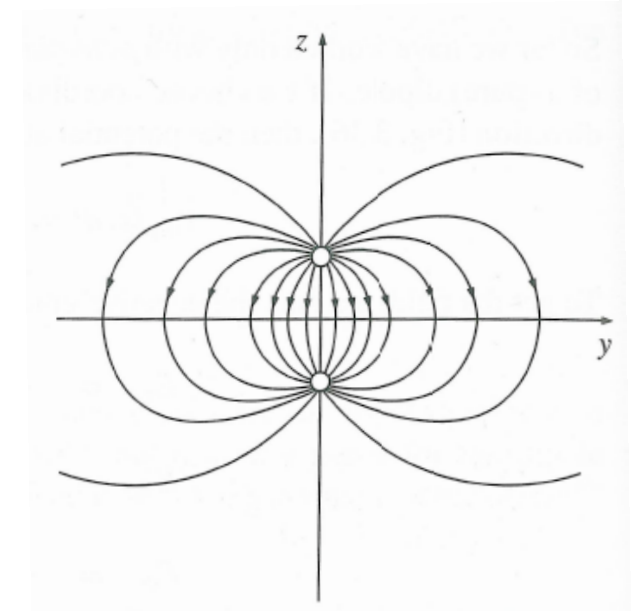
Dipol



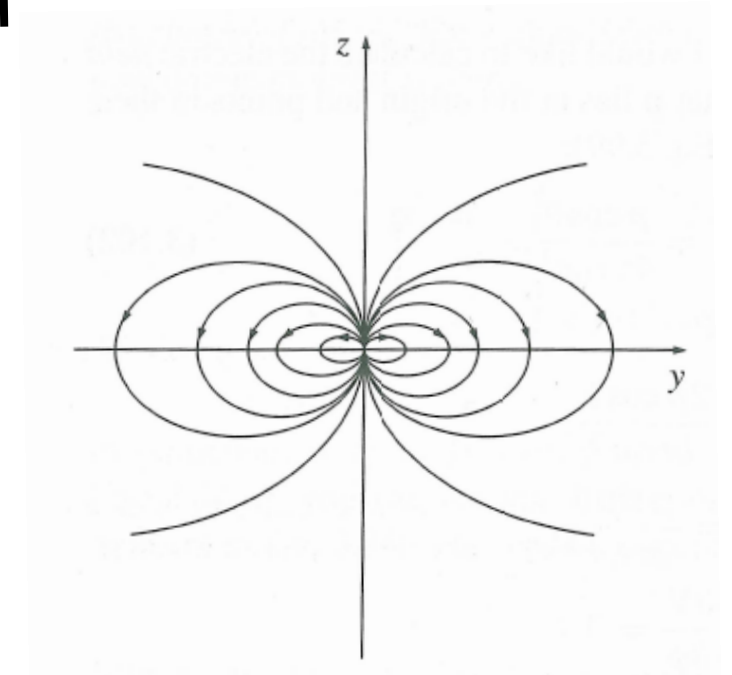
$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{\left| \vec{r} - \frac{\vec{d}}{2} \right|} - \frac{q}{\left| \vec{r} + \frac{\vec{d}}{2} \right|} \approx \frac{q(\vec{d} \cdot \vec{r})}{r^3}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{r} Q^{(0)} + \sum_i \frac{r_i}{r^3} Q_i^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5} Q_{ij}^{(2)} + \dots$$

$$Q_i^{(1)} = \int d^3 r_a \rho(\vec{r}_a) r_{a,i}$$



$$\vec{Q}^{(1)} = q\vec{d}$$



Kugel-Multipol-Entwicklung

Additionstheorem

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \cdot Y_{l,m}^*(\theta_a, \varphi_a) Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

$$r_{>} = \max(|\vec{r}|, |\vec{r}_a|)$$

$$r_{<} = \min(|\vec{r}|, |\vec{r}_a|)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$



$$r_{>} = |\vec{r}| = r \qquad r_{<} = |\vec{r}_a| = r_a$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{r_a^l}{r^{l+1}} \cdot Y_{l,m}^*(\theta_a, \varphi_a) Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

$$\Phi(\vec{r}) \equiv \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{r_a^l}{r^{l+1}} \cdot Y_{l,m}^*(\theta_a, \varphi_a) Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

Kugel-Multipol-Entwicklung

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{r_a^l}{r^{l+1}} \cdot Y_{l,m}^*(\theta_a, \varphi_a) Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} \cdot Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

$$q_{lm} \equiv \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) \cdot r_a^l \cdot Y_{l,m}^*(\theta_a, \varphi_a)$$

Relation zwischen Kugel- und kartesischen Multipol Entwicklungen

$$\begin{aligned}
 q_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} q \\
 \left. \begin{aligned}
 q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int (x' - iy') \rho(\mathbf{x}') d^3x' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y) \\
 q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int z' \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z
 \end{aligned} \right\} \\
 \left. \begin{aligned}
 q_{22} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int (x' - iy')^2 \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}) \\
 q_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int z' (x' - iy') \rho(\mathbf{x}') d^3x' = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} - iQ_{23}) \\
 q_{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int (3z'^2 - r'^2) \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33}
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$$q \equiv Q^{(0)} = \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) \qquad p_i \equiv Q_i^{(1)} = \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) r_{a,i}$$

$$Q_{ij} \equiv Q_{ij}^{(2)} = \int d^3r_a \rho(\vec{r}_a) (3r_{a,i} r_{a,j} - r_a^2 \delta_{ij})$$

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

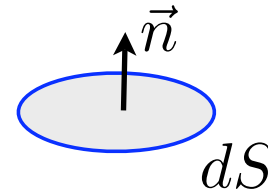
Magnetostatik

- Stationäre Ströme und Felder
- **Oersted** in 1819: Elektrische Ströme beeinflussen Magnete
- Kräfte zwischen Ströme beschrieben von **Biot** und **Savart** in 1820 und **Ampere** in 1820-1825

Strom, Stromdichte

Strom $I = \frac{dQ}{dt}$

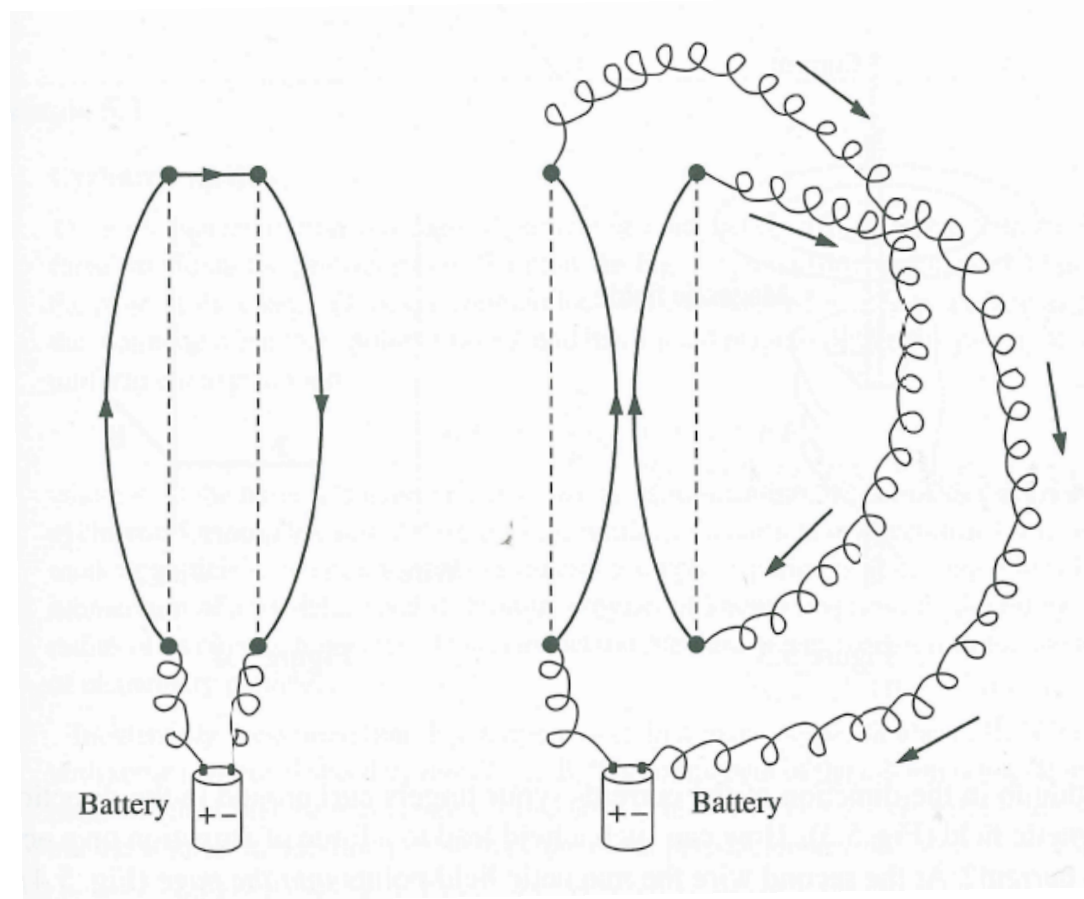
Stromdichte $\vec{j}_n = \frac{dI}{dS} \vec{n}$



Kontinuitätsgleichung (Erhaltung der Ladung)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

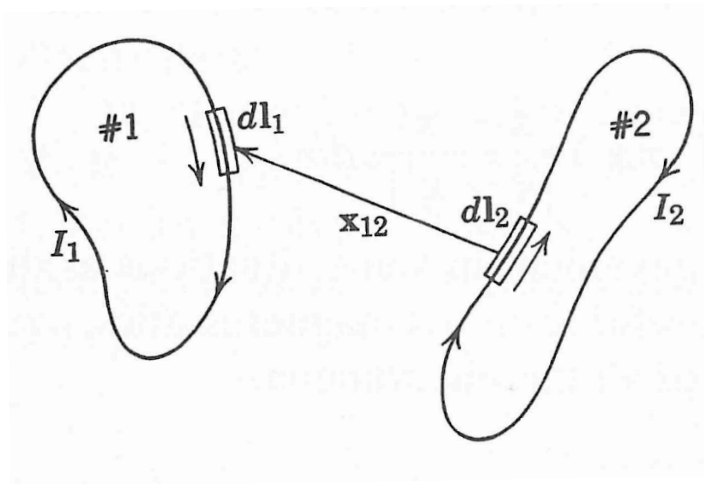
Kräfte zwischen Ströme



Kräfte zwischen Ströme

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} \propto I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad \text{Ampere}$$

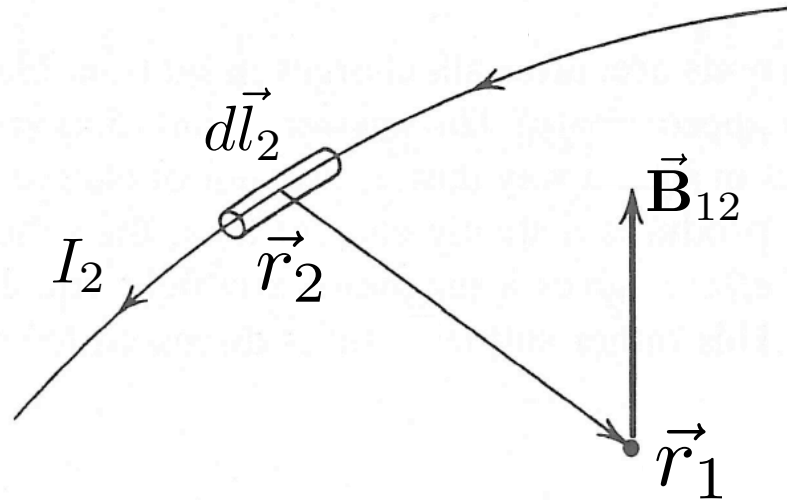
Kraft auf Element $d\vec{l}_1$ mit Strom I_1 im Punkt $\vec{r}_1$
erzeugt von Element $d\vec{l}_2$ mit Strom I_2 im Punkt $\vec{r}_2$



Magnetische Induktion
(nicht Magnetfeld, aber)

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} \propto I_1 (d\vec{l}_1 \times \vec{\mathbf{B}}_{12})$$

Magnetische Induktion

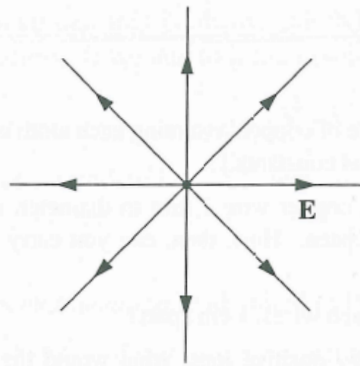


Magnetfeld
(Induktion)

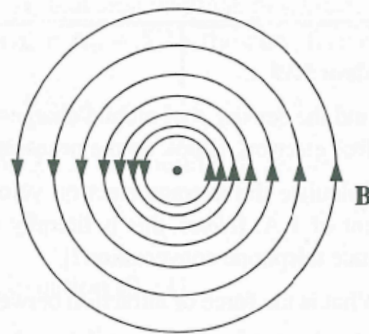
$$\vec{B}_{12} \propto I_2 \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Biot-Savart

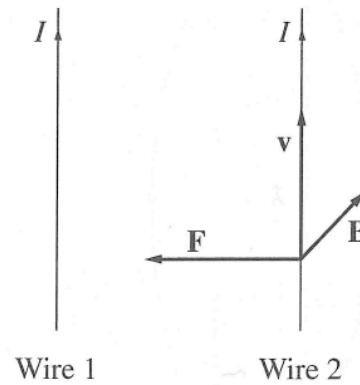
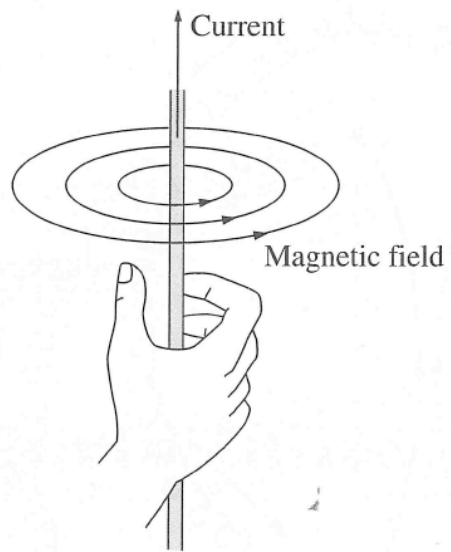
Magnetische Induktion im Punkt $\vec{r}_1$ erzeugt von Element $d\vec{l}_2$
mit Strom I_2 im Punkt $\vec{r}_2$



(a) Electrostatic field of a point charge



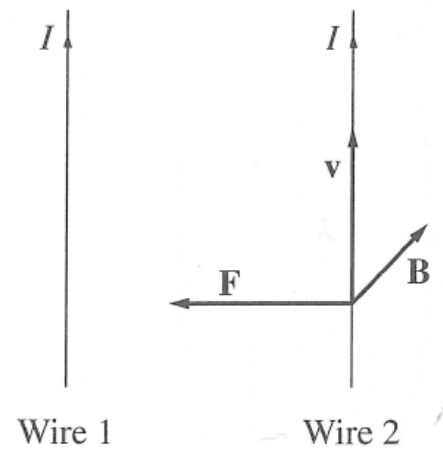
(b) Magnetostatic field of a long wire



Lorentz-Kraft

Kraft auf bewegendes geladenes Teilchen

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right)$$



Kräfte und Felder

Kräfte zwischen Ströme

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} \propto I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad \text{Ampere}$$

Kraft auf Element $d\vec{l}_1$ mit Strom I_1 im Punkt $\vec{r}_1$
erzeugt von Element $d\vec{l}_2$ mit Strom I_2 im Punkt $\vec{r}_2$

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} \propto I_1 (d\vec{l}_1 \times \vec{\mathbf{B}}_{12})$$

Magnetfeld: $\vec{\mathbf{B}}_{12} \propto I_2 \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad \text{Biot-Savart}$

Magnetfeld im Punkt $\vec{r}_1$ erzeugt von Element $d\vec{l}_2$
mit Strom I_2 im Punkt $\vec{r}_2$

Einheitensysteme

Gauß'sches System (cm, g, s)

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{c^2} I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad \vec{F}_{12} = \frac{1}{c} I_1 (d\vec{l}_1 \times \vec{B}_{12})$$

$$\vec{B}_{12} = \frac{1}{c} I_2 \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

$\vec{H} = \vec{B}$
Magnetfeld im
Vakuum

SI (m, kg, s)

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (N/A}^2\text{)}$$

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}$$

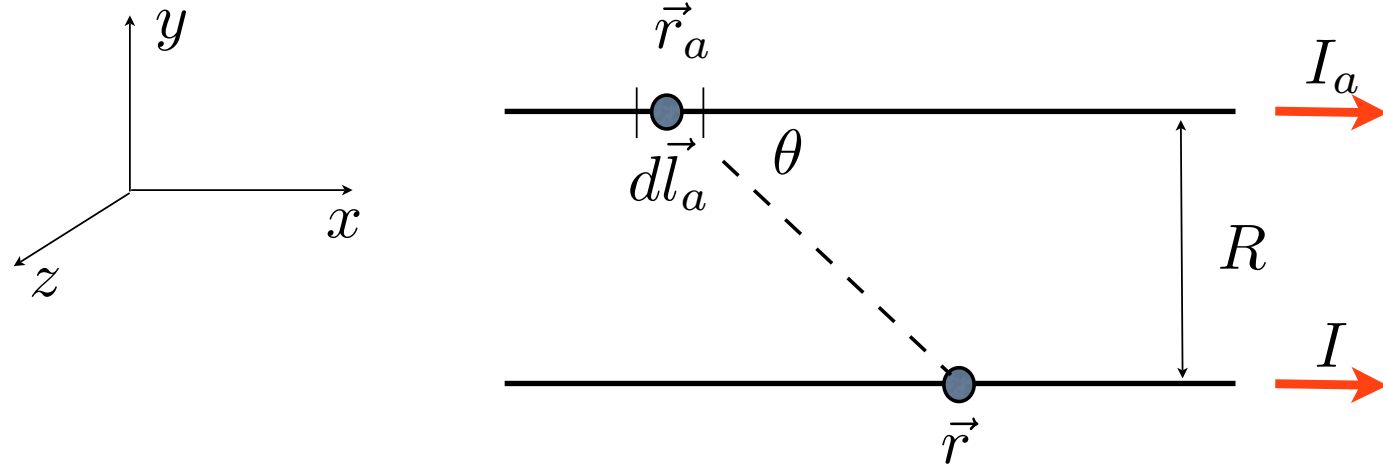
Stromeinheit (Ampere) bestimmt durch Kraft

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad \vec{F}_{12} = I_1 (d\vec{l}_1 \times \vec{B}_{12})$$

$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$
Magnetfeld im
Vakuum

Definition des Amperes



$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_a \int \frac{d\vec{l}_a \times (\vec{r} - \vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_a \vec{e}_z \int dx_a \frac{R}{[R^2 + (x - x_a)^2]^{3/2}} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_a \vec{e}_z \frac{1}{R} \int_0^\pi d\theta \sin \theta = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_a \vec{e}_z \frac{2}{R}\end{aligned}$$

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{r}) = I(d\vec{l} \times \vec{\mathbf{B}}(\vec{r})) = I \cdot I_a \cdot \vec{e}_y \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2}{R} \cdot dx$$

Mit $I = I_a = 1\text{A}$, $R = 1\text{m}$, und $dx = 1\text{m}$ gilt $F = 2 \cdot 10^{-7}\text{N}$

Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a) \times (\vec{r} - \vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3}$$

vergleichen mit:

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = \int d^3 r_a \rho(\vec{r}_a) \frac{\vec{r} - \vec{r}_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3}$$

Eigenschaften des Magnetfeldes

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a) \times (\vec{r} - \vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3}$$

mit $\frac{\vec{r} - \vec{r}_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3} = -\vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \right)$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \vec{\nabla}_r \times \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = \vec{\nabla}_r \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{r})$$

$$\downarrow$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

Eigenschaften des Magnetfeldes

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \vec{\nabla}_r \times \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = \vec{\nabla}_r \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{r})$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\vec{\nabla}_r \times \vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_r \times \vec{\nabla}_r \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{A}}$$

mit $\vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \right) = -\vec{\nabla}_{r_a} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \right)$ und $\nabla_r^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \right) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$



$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}) - \nabla^2 \vec{\mathbf{A}} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}) + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

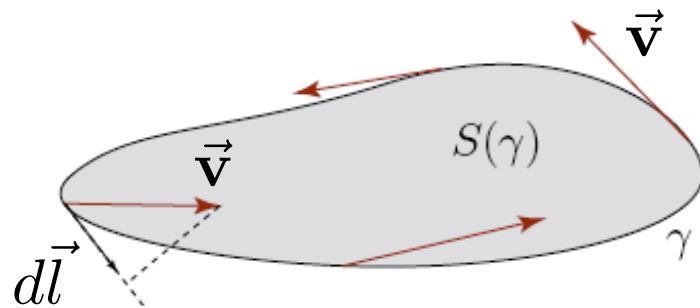
Für stationären Fall $\vec{\nabla} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

Zusammenfassung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{Ampere-Gesetz}$$

Integralform des Ampere-Gesetzes



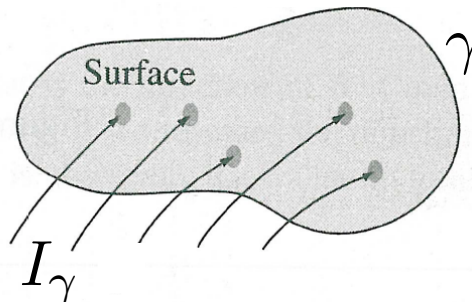
Stokes'sche Formel

$$\int_{\gamma} d\vec{l} \cdot \vec{v} = \int_{S(\gamma)} dS \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

Ampere-Gesetz

$$\int_{\gamma} \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_{S(\gamma)} (\vec{n} \cdot \vec{j}) dS = \frac{4\pi}{c} \int_{S(\gamma)} \vec{j} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} I_{\gamma}$$

$$d\vec{S} \equiv \vec{n} dS$$



I_{γ} - der Gesamtstrom
der durch γ fließt

Vektor-Potential

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \vec{\nabla}_r \times \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = \vec{\nabla}_r \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{r})$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

Auch für $\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} + \vec{\nabla} \chi$ gilt $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$

$\chi(\vec{r})$ ist beliebig - Eichungsfreiheit

Vektor-Potential, Coulomb-Eichung

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{c} \int d^3r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} + \vec{\nabla} \chi \quad \chi(\vec{r}) \text{ ist beliebig - Eichungsfreiheit}$$

Man kann $\chi(\vec{r})$ immer so wählen, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} = 0$ (Coulomb-Eichung)

Beweis: nehmen wir an, dass $\vec{\mathbf{A}}_0$ gegeben ist und $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}_0 \neq 0$.

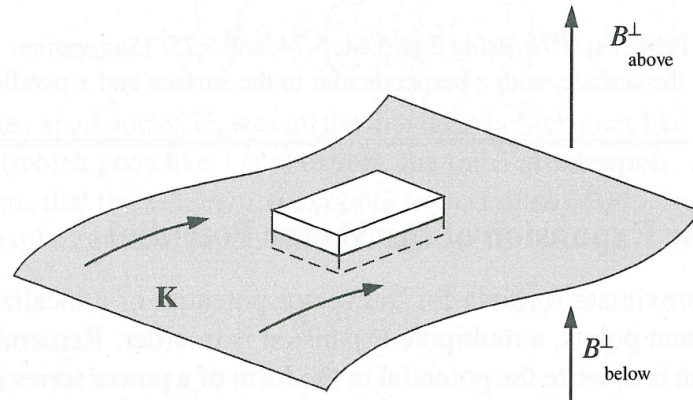
Wir wählen $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}_0 + \vec{\nabla} \cdot \chi(\vec{r})$ so, dass

$$\nabla^2 \chi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}_0$$

Das ist die Poisson-Gleichung. Man kann χ immer bestimmen.

Dann gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} = 0$.

Randbedingungen



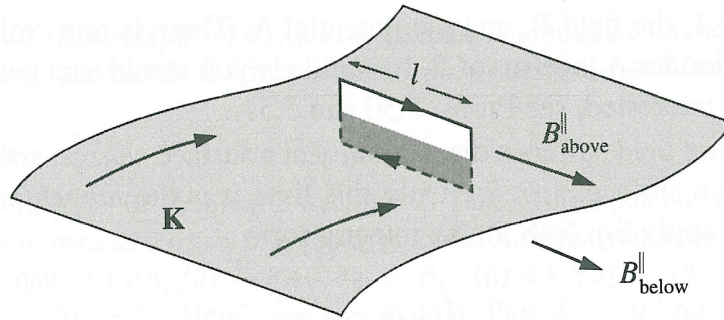
$\vec{K}$
Oberfläche-Stromdichte

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{S(V)} \vec{B} d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV = 0$$



$$B_{\text{above},\perp} = B_{\text{below},\perp}$$

Randbedingungen

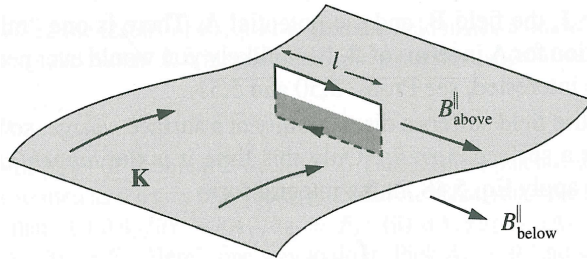


$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \rightarrow \quad \int_{\gamma(S)} \vec{B} d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_l K_{\perp} dl$$



$$\mathbf{B}_{\text{above},\parallel} - \mathbf{B}_{\text{below},\parallel} = \frac{4\pi}{c} (\vec{K} \times \vec{n})$$

Randbedingungen

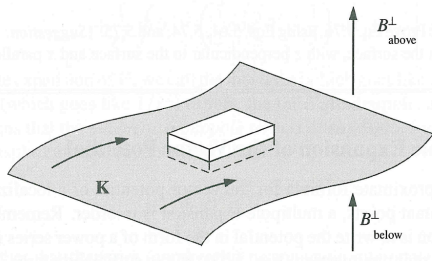


$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \rightarrow \quad \int_{\gamma(S)} \vec{A} d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\vec{S} = \int_S \vec{B} d\vec{S} \rightarrow 0$$

Fläche verschwindet

$$\vec{A}_{\text{above},\parallel} = \vec{A}_{\text{below},\parallel}$$

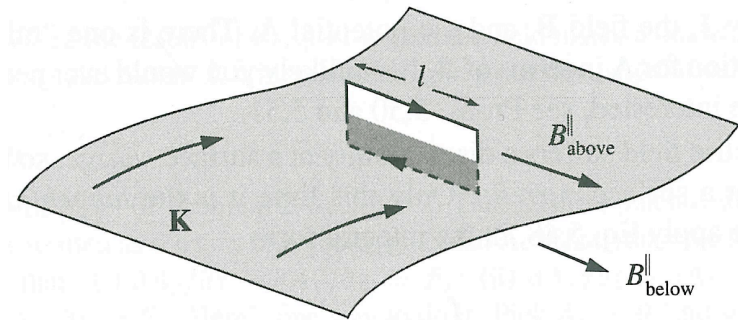
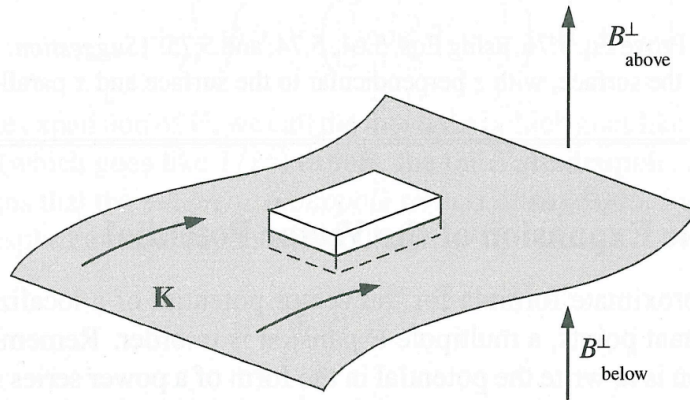
Zusätzlich in der Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$



$$\vec{A}_{\text{above},\perp} = \vec{A}_{\text{below},\perp} \quad \rightarrow \quad \vec{A}_{\text{above}} = \vec{A}_{\text{below}}$$

Kontinuierlich

Randbedingungen, Zusammenfassung



$$\mathbf{B}_{\text{above},\perp} = \mathbf{B}_{\text{below},\perp}$$

$$\mathbf{B}_{\text{above},\parallel} - \mathbf{B}_{\text{below},\parallel} = \frac{4\pi}{c} (\vec{K} \times \vec{n})$$



$$\mathbf{B}_{\text{above}} - \mathbf{B}_{\text{below}} = \frac{4\pi}{c} (\vec{K} \times \vec{n})$$

In der Coulomb-Eichung

$$\vec{A}_{\text{above}} = \vec{A}_{\text{below}}$$

Kontinuierlich

Multipol Entwicklung für Vektor-Potential

In kartesischen Koordinaten



$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = \frac{1}{r} + \sum_i \frac{r_i}{r^3} r_{a,i} + \dots \quad \rightarrow \quad \vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) = \vec{\mathbf{A}}^{(0)} + \vec{\mathbf{A}}^{(1)} + \dots$$

$$\vec{\mathbf{A}}^{(0)}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{cr} \int d^3 r_a \vec{j}(\vec{r}_a) \quad \text{Monopol-Beitrag}$$

$$\vec{\mathbf{A}}^{(1)}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{cr^3} \sum_i r_i \int d^3 r_a \vec{j}(\vec{r}_a) r_{a,i} \quad \text{Dipol-Beitrag}$$

Monopol-Beitrag

$$\int d^3r (f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f) = 0 \text{ für } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

1) Wir nehmen $g = r_i$ und $f = 1$, dann gilt $\int d^3r j_i = 0$,
d.h., $\int d^3r \vec{j} = 0$

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{cr} \int d^3r_a \vec{j}(\vec{r}_a) = 0 \quad \text{Keine magnetische Monopole}$$

Dipol-Beitrag

$$\int d^3r (f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f) = 0 \text{ für } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

2) Wir nehmen $g = r_i$ und $f = r_j$, dann gilt
 $\int d^3r (r_i j_j + r_j j_i) = 0$

$$\begin{aligned} A_j^{(1)}(\vec{r}) &\equiv \frac{1}{cr^3} \sum_i r_i \int d^3r_a j_j(\vec{r}_a) r_{a,i} \\ &= \frac{1}{2cr^3} \sum_i r_i \int d^3r_a (j_j(\vec{r}_a) r_{a,i} - j_i(\vec{r}_a) r_{a,j}) \\ &= -\frac{1}{2cr^3} \sum_{i,k} \epsilon_{jik} r_i \int d^3r_a \left[\vec{r}_a \times \vec{j}(\vec{r}_a) \right]_k \\ &= -\frac{1}{2cr^3} \left[\vec{r} \times \int d^3r_a \left[\vec{r}_a \times \vec{j}(\vec{r}_a) \right] \right]_j \end{aligned}$$

$a_j b_i - a_i b_j = \sum_k \epsilon_{kji} (\vec{a} \times \vec{b})_k$

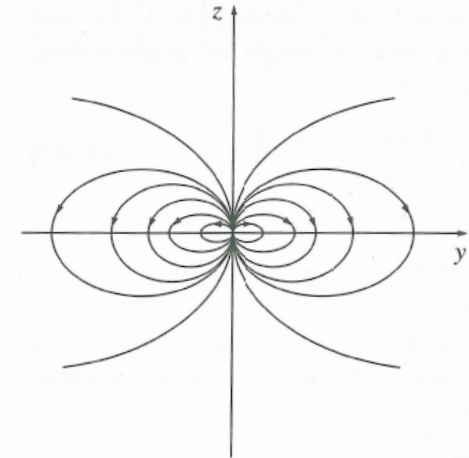
Dipol-Beitrag, Magnetisches Moment

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = -\frac{1}{2cr^3} \vec{r} \times \int d^3r_a \left[\vec{r}_a \times \vec{j}(\vec{r}_a) \right]$$

Wir definieren $\vec{m} \equiv \frac{1}{2c} \int d^3r_a \left[\vec{r}_a \times \vec{j}(\vec{r}_a) \right]$ **Magnetisches Moment**

Dann gilt $\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$

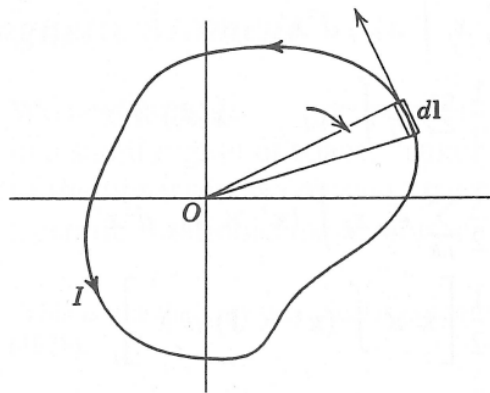
$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} \approx \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(1)} = \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3} \quad \vec{n} \equiv \frac{\vec{r}}{r}$$



Magnetisches Moment einer Stromschleife

$$\vec{\mathbf{m}} = \frac{1}{2c} \int d^3r_a \left[\vec{r}_a \times \vec{j}(\vec{r}_a) \right] = \frac{I}{2c} \int \vec{r}_a \times d\vec{l}_a$$

Einfacher Fall: Schleife in einer Ebene



$$\vec{\mathbf{m}} = \frac{I}{2c} \int \vec{r}_a \times d\vec{l}_a = \frac{IS}{c} \vec{n}$$

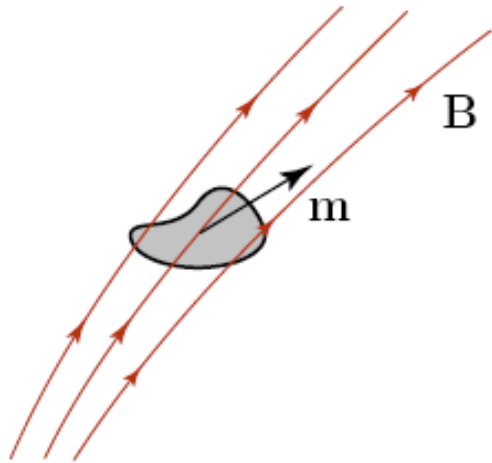
Magnetisches Moment eines Teilchensystems

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r_a \left[\vec{r}_a \times \vec{j}(\vec{r}_a) \right] = \frac{1}{2c} \sum_i q_i \left[\vec{r}_i \times \vec{v}_i \right]$$

$$= \frac{1}{2c} \sum_i \frac{q_i}{m_i} \left[\vec{r}_i \times \vec{p}_i \right] = \sum_i \frac{q_i}{2cm_i} \vec{l}_i$$

Kraft auf magnetisches Moment im externen Magnetfeld



$$\vec{F} = \frac{1}{c} I (d\vec{l} \times \vec{B})$$



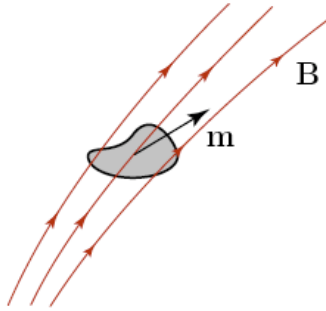
$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int d^3r [\vec{j} \times \vec{B}]$$

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int d^3r [\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})]$$

$$= \frac{1}{c} \int d^3r \left[\vec{j}(\vec{r}) \times \left(\vec{B}(0) + \sum_i r_i \nabla_i \vec{B}(0) + \dots \right) \right]$$

$$\approx \frac{1}{c} \int d^3r \left[\vec{j}(\vec{r}) \times \sum_i r_i \nabla_i \vec{B}(0) \right]$$

Kraft auf magnetisches Moment im externen Magnetfeld



$$\vec{F} \approx \frac{1}{c} \int d^3r \left[\vec{j}(\vec{r}) \times \sum_i r_i \nabla_i \vec{B}(0) \right]$$

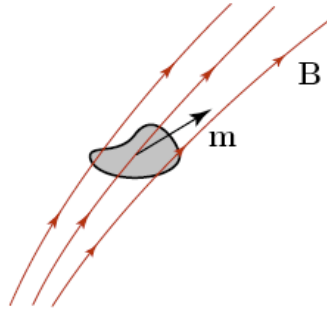
$$\int d^3r (r_i j_j + r_j j_i) = 0$$

$$F_k \approx \frac{1}{c} \sum_{ilm} \int d^3r \epsilon_{klm} j_l r_i \nabla_i B_m(0) = \frac{1}{2c} \sum_{ilm} \int d^3r \epsilon_{klm} (j_l r_i - j_i r_l) \nabla_i B_m(0)$$

$$a_j b_i - a_i b_j = \sum_k \epsilon_{kji} (\vec{a} \times \vec{b})_k$$

$$\begin{aligned} F_k &\approx \frac{1}{2c} \sum_{ilm} \int d^3r \epsilon_{klm} \epsilon_{pil} (\vec{r} \times \vec{j})_p \nabla_i B_m(0) \quad \sum_l \epsilon_{klm} \epsilon_{pil} = \delta_{ki} \delta_{mp} - \delta_{kp} \delta_{mi} \\ &= \frac{1}{2c} \sum_{imp} \int d^3r (\delta_{ki} \delta_{mp} - \delta_{kp} \delta_{mi}) (\vec{r} \times \vec{j})_p \nabla_i B_m(0) \\ &= \frac{1}{2c} \sum_m \int d^3r \left[(\vec{r} \times \vec{j})_m \nabla_k B_m(0) - (\vec{r} \times \vec{j})_k \nabla_m B_m(0) \right] \end{aligned}$$

Kraft auf Magnetisches Moment im externen Magnetfeld



$$F_k = \frac{1}{2c} \sum_m \int d^3r \left[(\vec{r} \times \vec{j})_m \nabla_k B_m(0) - \cancel{(\vec{r} \times \vec{j})_k \nabla_m B_m(0)} \right]$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2c} \int d^3r_a \left[\vec{r}_a \times \vec{j}(\vec{r}_a) \right]$$

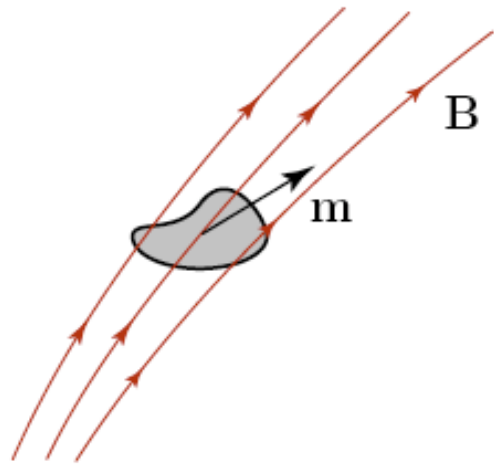
$$F_k = \sum_m m_m \nabla_k B_m(0) = \sum_m \nabla_k m_m B_m(0)$$

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

Potenzielle Energie (allgemein keine Gesamtenergie)

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \qquad U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Magnetisches Moment im externen Magnetfeld, das Drehmoment



$$d\vec{N} = \vec{r} \times d\vec{F} \quad \text{und} \quad \vec{F} = \frac{1}{c} \int d^3r \left[\vec{j} \times \vec{B} \right]$$



$$\vec{N} = \frac{1}{c} \int d^3r \left[\vec{r} \times \left[\vec{j} \times \vec{B} \right] \right]$$

$$\vec{N} = \frac{1}{c} \int d^3r \left[\vec{r} \times \left[\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \right] \right]$$

$$= \frac{1}{c} \int d^3r \left[\vec{r} \times \left[\vec{j}(\vec{r}) \times \left(\vec{B}(0) + \sum_i r_i \nabla_i \vec{B}(0) + \dots \right) \right] \right]$$

$$\approx \frac{1}{c} \int d^3r \left[\vec{r} \times \left[\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(0) \right] \right] = \vec{m} \times \vec{B}$$

Übung

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Zusammenfassung

Elektrostatik $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho \quad \text{Gauß-Gesetz}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = 0$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho$$

Poisson-Gleichung

Magnetostatik

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

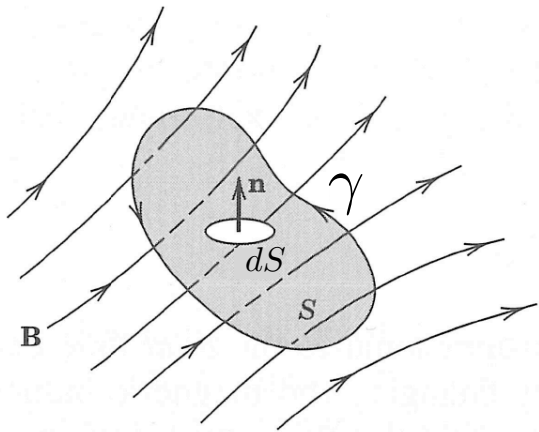
$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{Ampere-Gesetz}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

Faraday-Gesetz der Induktion

- Zum ersten mal: zeitabhängiges Phänomen
- **Faraday** in 1831: Ströme erzeugt von zeitabhängigen Magnetfeldern

Faraday-Gesetz



$$\int_{\gamma(S)} d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B}$$

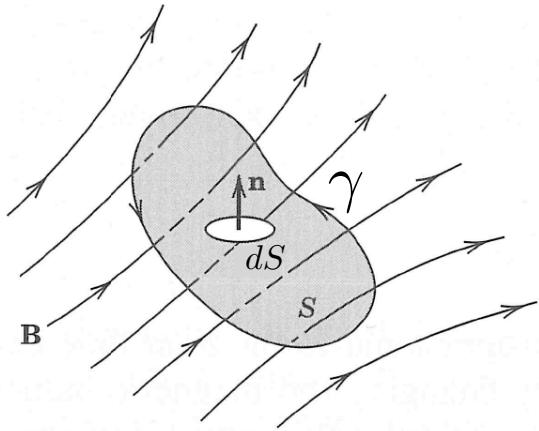
$$\text{oder} \quad \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\mathcal{E} \equiv \int_{\gamma(S)} d\vec{l} \cdot \vec{E} \quad \text{EMK (Elektromotorische Kraft)}$$

$$\Phi \equiv \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B} \quad \text{Magnetischer Fluss}$$

für Skalarpotential bitte benutzen ϕ statt Φ

Faraday-Gesetz



$$\int_{\gamma(S)} d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B}$$



$$\int_S d\vec{S} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B}$$



$$\cancel{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Neue Situation

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho \quad \text{Gauß-Gesetz}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0 \quad \text{Faraday-Gesetz}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{Ampere-Gesetz}$$

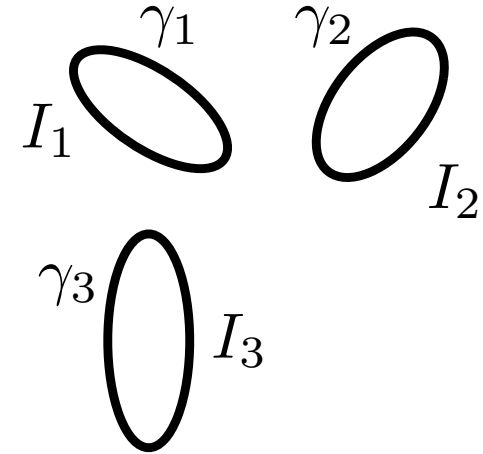
Noch Änderungen? (Ja, in Ampere-Gesetz, aber später)

Selbstinduktivitäten und Gegeninduktivitäten

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

Magnetischer Fluss

$$\Phi \equiv \int_S d\vec{S} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \int_S d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}) = \int_{\gamma} d\vec{l} \cdot \vec{\mathbf{A}}$$



Für mehreren Schleifen

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) = \sum_i \frac{I_i}{c} \int_{\gamma_i} \frac{d\vec{l}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\Phi_j = \int_{\gamma_j} d\vec{l}_j \cdot \vec{\mathbf{A}}(\vec{r}_j) = \sum_i \frac{I_i}{c} \int_{\gamma_j} \int_{\gamma_i} \frac{d\vec{l}_j \cdot d\vec{l}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

Mögliche Divergenz für $i=j$ (OK wegen Dicke des Drahtes)

Selbstinduktivitäten und Gegeninduktivitäten

$$\Phi_j = \sum_i \frac{I_i}{c} \int_{\gamma_j} \int_{\gamma_i} \frac{d\vec{l}_j \cdot d\vec{l}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

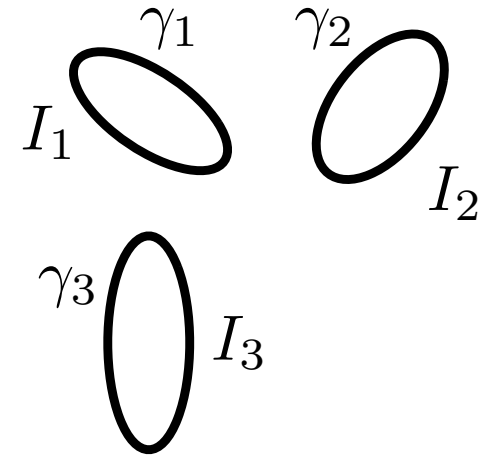
$$\Phi_j = c \sum_i M_{ji} I_i \quad \text{Linearität}$$

$$M_{ij} = \frac{1}{c^2} \int \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

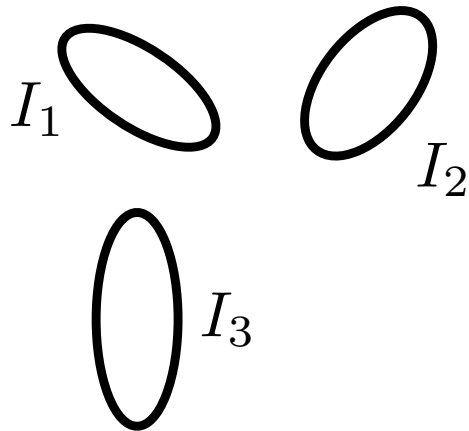
$$M_{ij} = M_{ji}$$

$$M_{ii} \equiv L_i$$

Selbstinduktivitäten



Magnetische Energie



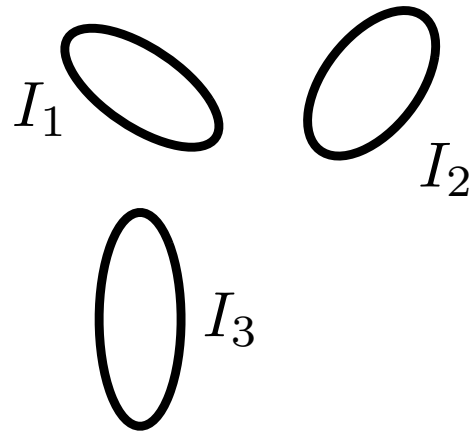
Magnetische Energie ist die Arbeit die man leisten muss um die gegebene Stromverteilung zu erzeugen, z.B.:

1) Die Ströme in den Schleifen die weit von einanderen sind erzeugen und dann die Stromschleifen zusammenbringen so, dass die Ströme in jeder Schleife erhalten bleiben;

2) Die Schleifen erst in ihren endgültigen Positionen zu bringen und dann die Ströme erzeugen;

3)

Magnetische Energie, Übliche Herleitung (kurz)



$$\frac{dW}{dt} = \sum_i (\vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{v}_i) = - \sum_i (\vec{\mathbf{E}}_i \cdot q_i \vec{v}_i) = - \int dV (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{j}) = -I\mathcal{E}$$

$$\mathcal{E} \equiv \int_{\gamma} d\vec{l} \cdot \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\delta W_{\text{magn}} = \frac{1}{c} \sum_i I_i \delta \Phi_i = \frac{1}{c} \int dV (\vec{j} \cdot \delta \vec{\mathbf{A}})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{statisch}$$

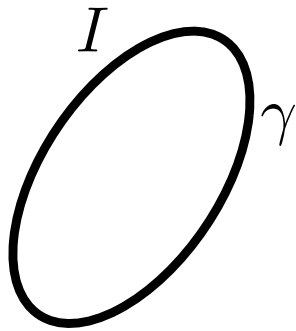
$$\delta W_{\text{magn}} = \frac{1}{4\pi} \int dV (\vec{\mathbf{B}} \cdot \delta \vec{\mathbf{B}}) = \frac{1}{8\pi} \delta \int dV (\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{B}})$$

$$\delta(\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) = 2 (\vec{\mathbf{B}} \cdot \delta \vec{\mathbf{B}})$$

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{8\pi} \int dV (\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{B}})$$

Arbeit gegen EMK

Um den Strom in einer Schleife konstant zu behalten als der magnetische Fluss durch die Schleife (erzeugt von anderen Strömen) sich ändert muss man Arbeit gegen EMK leisten



$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) dt$$

$$\vec{\mathbf{F}} = -q\vec{\mathbf{E}} \quad \text{Kraft gegen EMK}$$

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i (\vec{\mathbf{F}}_i \cdot \vec{\mathbf{v}}_i) = - \sum_i (\vec{\mathbf{E}}_i \cdot q_i \vec{\mathbf{v}}_i) = - \int dV (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{j}})$$

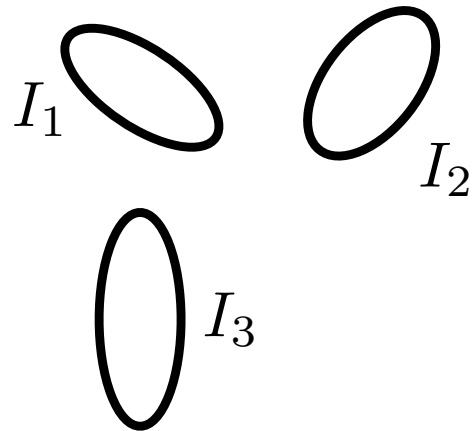
für Stromschleife

$$\frac{dW}{dt} = - \int dV (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{j}}) = -I\mathcal{E}$$

$$\mathcal{E} \equiv \int_{\gamma} d\vec{\mathbf{l}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

Magnetische Energie

Arbeit gegen EMK in dem Gesamtsystem
(auch in der Schleife in der der Strom geändert wird)



$$\frac{dW_{\text{EMK}}}{dt} = - \sum_i I_i \mathcal{E}_i = \frac{1}{c} \sum_i I_i \frac{d\Phi_i}{dt}$$

$$\Phi_i = c \sum_j M_{ij} I_j \quad \frac{dW_{\text{EMK}}}{dt} = \sum_{i,j} I_i \frac{d}{dt} (M_{ij} I_j)$$

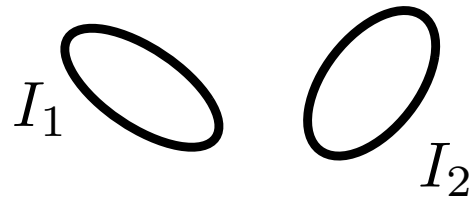
Noch mechanische Arbeit (Bewegung der Schleifen)

$$\frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = ?$$

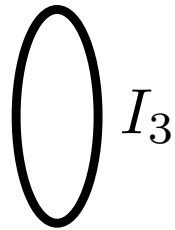
Die Gesamtmagnetische Energie:

$$\frac{dW_{\text{magn}}}{dt} = \frac{dW_{\text{EMK}}}{dt} + \frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = \sum_{i,j} I_i \frac{d}{dt} (M_{ij} I_j) + \frac{dW_{\text{mech}}}{dt}$$

Magnetische Energie



$$\frac{dW_{\text{magn}}}{dt} = \sum_{i,j} I_i \frac{d}{dt} (M_{ij} I_j) + \frac{dW_{\text{mech}}}{dt}$$



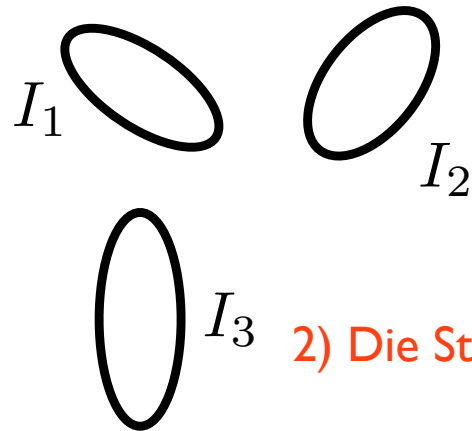
I) Die Induktivitäten sind konstant (die Schleifen bewegen sich nicht)

$$\frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dW_{\text{magn}}}{dt} = \sum_{i,j} M_{ij} I_i \frac{dI_j}{dt}$$

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2c} \sum_i I_i \Phi_i$$

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \sum_i L_i I_i^2 + \sum_{i < j} M_{ij} I_i I_j$$

Magnetische Energie



$$\frac{dW_{\text{magn}}}{dt} = \sum_{i,j} I_i \frac{d}{dt} (M_{ij} I_j) + \frac{dW_{\text{mech}}}{dt}$$

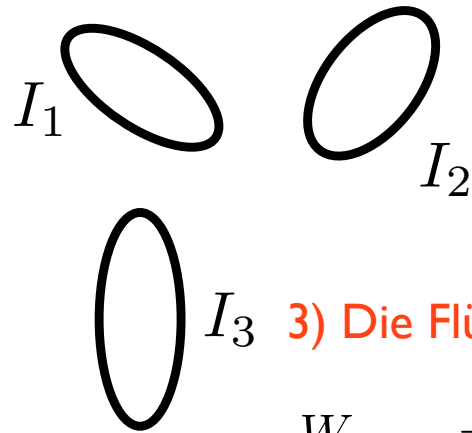
$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j$$

2) Die Ströme sind konstant (die Schleifen bewegen sich)

$$\frac{dW_{\text{magn}}}{dt} = \sum_{i,j} I_i \frac{dM_{ij}}{dt} I_j + \frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = 2 \frac{dW_{\text{magn}}}{dt} + \frac{dW_{\text{mech}}}{dt}$$

$$\frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = - \left. \frac{dW_{\text{magn}}}{dt} \right|_I$$

Magnetische Energie



$$\frac{dW_{\text{magn}}}{dt} = \sum_{i,j} I_i \frac{d}{dt} (M_{ij} I_j) + \frac{dW_{\text{mech}}}{dt}$$

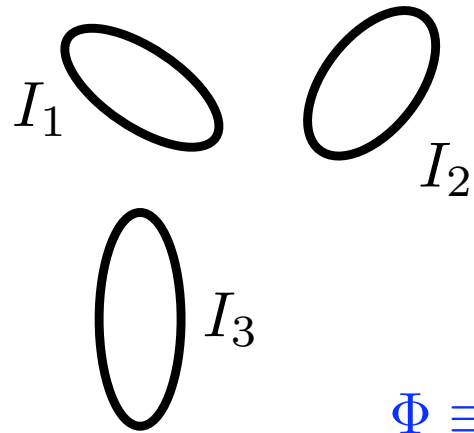
3) Die Flüsse sind konstant (supraleitende Schleifen)

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2c} \sum_i I_i \Phi_i = \frac{1}{2c^2} \sum_{ij} \Phi_i M_{ij}^{-1} \Phi_j$$

$$\Phi_i = c \sum_j M_{ij} I_j \quad I_i = \frac{1}{c} \sum_j M_{ij}^{-1} \Phi_j$$

$$\left. \frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = \frac{dW_{\text{magn}}}{dt} \right|_{\Phi}$$

Magnetische Energie

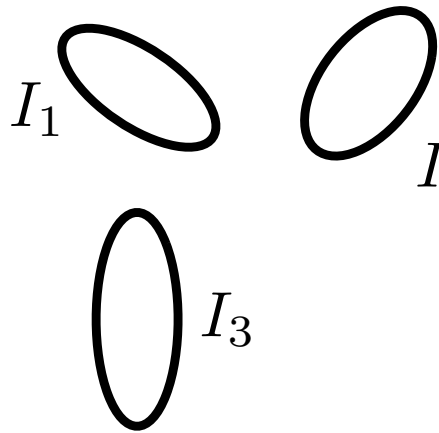


$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2c} \sum_i I_i \Phi_i$$

$$\Phi \equiv \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = \int_S d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \int_{\gamma} d\vec{l} \cdot \vec{A}$$

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2c} \sum_i I_i \int_{\gamma_i} d\vec{l}_i \cdot \vec{A}(\vec{r}_i) = \frac{1}{2c} \int dV (\vec{j} \cdot \vec{A})$$

Magnetische Energie



$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2c} \int dV (\vec{j} \cdot \vec{A})$$

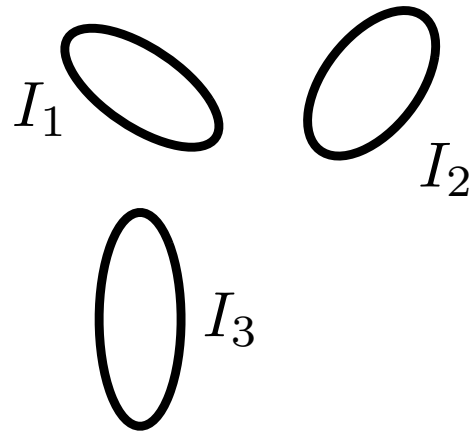
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{statisch}$$

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2c} \int dV (\vec{A} \cdot \vec{j}) = \frac{1}{8\pi} \int dV (\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}))$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = \vec{q} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{p}) - \vec{p} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{q})$$

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{8\pi} \int dV (\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})) = \frac{1}{8\pi} \int dV (\vec{B} \cdot \vec{B})$$

Magnetische Energie, Übliche Herleitung



$$\frac{dW_{\text{magn}}}{dt} = \sum_{i,j} I_i \frac{d}{dt} (M_{ij} I_j) + \frac{dW_{\text{mech}}}{dt}$$

z.B. ohne mechanischen Arbeit (feste Schleifen)

$$\delta W_{\text{magn}} = \frac{1}{c} \sum_i I_i \delta \Phi_i = \frac{1}{c} \int dV (\vec{j} \cdot \delta \vec{A})$$

$$\delta W_{\text{magn}} = \frac{1}{4\pi} \int dV (\vec{B} \cdot \delta \vec{B}) = \frac{1}{8\pi} \delta \int dV (\vec{B} \cdot \vec{B})$$

$$\delta(\vec{B} \cdot \vec{B}) = 2 (\vec{B} \cdot \delta \vec{B})$$

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{8\pi} \int dV (\vec{B} \cdot \vec{B})$$

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Maxwell Gleichungen

- J.C. Maxwell in 1865 hat das Ampere-Gesetz geändert und dadurch haben wir Radio,, Relativitätstheorie u.s.w.

Die Situation vor Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho \quad \text{Gauß-Gesetz}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0 \quad \text{Faradey-Gesetz}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{Ampere-Gesetz}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{aber} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Widerspruch

Die Idee

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{Ampere-Gesetz}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{aber} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Widerspruch

Es gilt aber

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) = \frac{4\pi}{c} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho$$

Gauß-Gesetz

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}$$

Die Idee: Ampere-Gesetz soll wie folgt geändert werden

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j} \rightarrow \left(\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right) \longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

Die Situation nach Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad \text{Gauß-Gesetz}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{Faraday-Gesetz}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

~~$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$~~

Ampere-Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{oder} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Verschiebungsstrom

Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Kontinuitätsgleichung
folgt aus den M.-G.

Oder

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{E}}$$

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{B}}$$

Vektor- und Skalarpotential

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \longrightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi \longrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Vektor- und Skalarpotential

$$\begin{array}{ccc} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0 & & \vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 & \longleftrightarrow & \vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \\ & \text{Äquivalent} & \end{array}$$

Mit der Darstellung durch die Vektor- und Skalarpotential sind die zwei homogene Maxwell-Gleichungen immer erfüllt

Vektor- und Skalarpotential

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

Die zwei nicht homogene Maxwell-Gleichungen ergeben



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = -\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}) = 4\pi\rho$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Eichungsfreiheit

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}'$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \quad \text{aber auch}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}'}{\partial t}$$

$$\vec{\mathbf{A}}' = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\nabla}\chi$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

ergeben die selben
 $\vec{\mathbf{B}}$ und $\vec{\mathbf{E}}$

Heufig genutzte Eichungen

Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

gut für
Strahlungsprobleme

Lorenz-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

gut für
Relativistische Invarianz

nach Ludvig V. Lorenz aus Dänemark
nicht Hendrik A. Lorentz aus Holland

Für beliebigen Skalar- und Vektorpotential man kann die Eichungstransformation finden so,
dass entweder Coulomb- oder Lorenz-Eichungskonditionen erfüllt sind

Beide Eichungskonditionen eliminieren die
Eichungsfreiheit nicht ganz

Für beliebigen Skalar- und Vektorpotential man kann die Eichungstransformation finden so, dass entweder Coulomb- oder Lorenz-Eichungskonditionen erfüllt sind

z.B. Lorenz-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

Nehmen wir an, dass es $\vec{A}'$ und ϕ' gegeben sind
und $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} \neq 0$

Wir führen eine Eichungstransformation durch:
 $\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla} \chi$ und $\phi = \phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$

Dann gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla^2 \chi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$

Um $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ zu erfüllen

brauchen wir $\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} \right)$

Wir werden später zeigen, dass diese Gleichung immer gelöst werden kann

Beide Eichungskonditionen eliminieren die
Eichungsfreiheit nicht ganz

$$\vec{\mathbf{A}}' = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\nabla}\chi$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} = 0$

wenn $\nabla^2 \chi = 0$ dann gilt auch $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}' = 0$

Lorenz-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

wenn $\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$ dann gilt auch $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0$

Nicht homogene M.-G., Coulomb-Eichung

$$-\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}) = 4\pi\rho$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} = 0$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

Coulomb-Eichung: Querstrom & Längsstrom

Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad \text{Lösung} \quad \phi(\vec{r}, t) = \int d^3r_a \frac{\rho(\vec{r}_a, t)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_\perp$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{j}_\perp(\vec{r}) + \vec{j}_\parallel(\vec{r}) \quad \text{so, dass} \quad \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\perp(\vec{r}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{j}_\parallel(\vec{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Die Teilung bis zu einer Konstante
eindeutlich

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_\parallel \quad \text{Übung}$$

Nicht homogene M.-G., Lorenz-Eichung

$$-\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}) = 4\pi \rho$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Lorenz-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Energie-Bilanz des elektromagnetischen Feldes

$$\vec{\mathbf{B}} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0 \right] \quad \text{minus} \quad \vec{\mathbf{E}} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right]$$



$$\frac{1}{c} \vec{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{B}} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) + \vec{\mathbf{E}} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

$$\frac{1}{c} \vec{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{\mathbf{E}} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}})$$

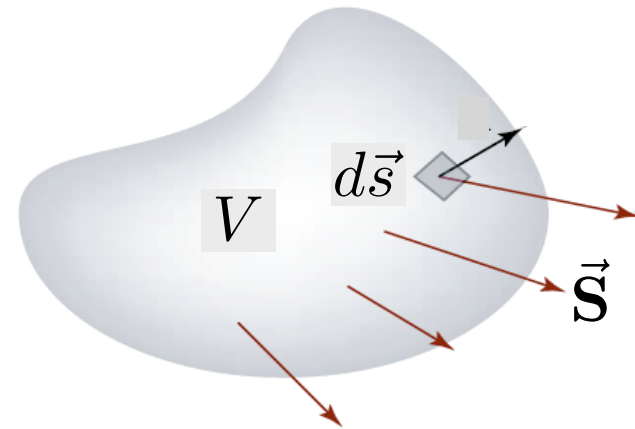
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{B}}}{8\pi} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{\mathbf{E}} - \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}) = -\vec{j} \cdot \vec{\mathbf{E}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{S}}$$

$$\vec{\mathbf{S}} \equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}) \quad \text{Poynting-Vektor}$$

Energie-Bilanz des elektromagnetischen Feldes

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{B}}}{8\pi} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{\mathbf{E}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{S}}$$

$$\vec{\mathbf{S}} \equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}) \quad \text{Poynting-Vektor}$$



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \left(\frac{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{B}}}{8\pi} \right) = - \int_V dV (\vec{j} \cdot \vec{\mathbf{E}}) - \int_{S(V)} d\vec{s} \cdot \vec{\mathbf{S}}$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$\int_V dV (\vec{j} \cdot \vec{\mathbf{E}}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}_i) = \frac{d}{dt} W_{EM}$$

W_{EM} - Arbeit geleistet vom e.-m. Feld auf geladenen Teilchen

Energie-Bilanz des elektromagnetischen Feldes

$$\frac{d}{dt} U_{feld}(V) = -\frac{d}{dt} W_{EM}(V) - \int_{S(V)} d\vec{s} \cdot \vec{S}$$

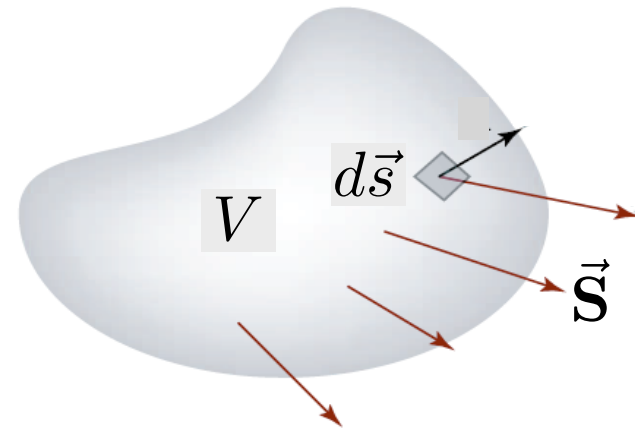
$$\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad \text{Poynting-Vektor}$$

$$\int_V dV (\vec{j} \cdot \vec{E}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i) = \frac{d}{dt} W_{EM}$$

W_{EM} - Arbeit geleistet vom e.-m. Feld auf geladenen Teilchen

$U_{feld}(V) = \int_V dV \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{B}}{8\pi} \right)$ - Energie des e.-m. Feldes im Volumen V

$\vec{S}$ - Fluss der Energie des Feldes



Impuls-Bilanz des elektromagnetischen Feldes

Lorentz-Kraft auf bewegendes geladenes Teilchen

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right)$$

$$\frac{d\vec{P}_{\text{teilchen}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q_i \left(\vec{E}(\vec{r}_i) + \frac{\vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i)}{c} \right)$$

$$\frac{d\vec{P}_{\text{teilchen}}}{dt} = \int dV \left(\rho \vec{E} + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{c} \right) \quad \rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad \vec{j}(\vec{r}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

$$\frac{d\vec{P}_{\text{teilchen}}}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int dV \left(\vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \right)$$

Impuls-Bilanz des elektromagnetischen Feldes

$$\frac{d\vec{P}_{\text{teilchen}}}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int dV \left(\vec{\mathbf{E}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}) - \vec{\mathbf{B}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \times \vec{\mathbf{B}} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \times \vec{\mathbf{B}} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}) - \vec{\mathbf{E}} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}) + c \vec{\mathbf{E}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}})$$

$$\frac{d\vec{P}_{\text{teilchen}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int dV \frac{(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}})}{4\pi c} = \frac{1}{4\pi} \int dV \left(\vec{\mathbf{E}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}) - \vec{\mathbf{B}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) - \vec{\mathbf{E}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\frac{d\vec{P}_{\text{teilchen}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int dV \frac{(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}})}{4\pi c} = \frac{1}{4\pi} \int dV \left(\vec{\mathbf{E}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}) - \vec{\mathbf{E}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) + \vec{\mathbf{B}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}}) - \vec{\mathbf{B}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) \right)$$

Impuls-Bilanz des elektromagnetischen Feldes

$$\frac{d\vec{P}_{\text{teilchen}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int dV \frac{(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}})}{4\pi c} = \frac{1}{4\pi} \int dV \left(\vec{\mathbf{E}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}}) - \vec{\mathbf{E}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) + \vec{\mathbf{B}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}}) - \vec{\mathbf{B}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) \right)$$

$$\left[\vec{\mathbf{X}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{X}}) - \vec{\mathbf{X}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{X}}) \right]_j = \sum_i \nabla_i [X_i X_j] - \frac{1}{2} \sum_i \nabla_j [X_i X_i] = \sum_i \nabla_i \left[X_i X_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (\vec{\mathbf{X}} \cdot \vec{\mathbf{X}}) \right]$$

$$T_{ij} \equiv \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) \right] \quad \text{Maxwell'scher Spannungstensor}$$

$$\left[\frac{d\vec{P}_{\text{teilchen}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int dV \frac{(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}})}{4\pi c} \right]_j = \int dV \sum_i (\nabla_i T_{ij})$$

Impuls-Bilanz des elektromagnetischen Feldes

$$T_{ij} \equiv \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{B}) \right] \quad \text{Maxwell'scher Spannungstensor}$$

$$\left[\frac{d\vec{P}_{\text{teilchen}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int dV \frac{(\vec{E} \times \vec{B})}{4\pi c} \right]_j = \int dV \sum_i (\nabla_i T_{ij})$$

Gauß-Formel

$$\left[\frac{d\vec{P}_{\text{teilchen}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int dV \frac{(\vec{E} \times \vec{B})}{4\pi c} \right]_j = \int_{S(V)} \sum_i ds_i T_{ij}$$

$$\left[\frac{d\vec{P}_{\text{teilchen}}}{dt} + \frac{d\vec{P}_{\text{feld}}}{dt} \right]_j = \int_{S(V)} \sum_i ds_i T_{ij}$$

$$\vec{P}_{\text{feld}} = \int dV \frac{(\vec{E} \times \vec{B})}{4\pi c} = \int dV \vec{g} \quad \text{und} \quad \vec{g} \equiv \frac{\vec{S}}{c^2} \quad \text{Impulsdichte des Feldes}$$

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Elektromagnetische Wellen

- **H. Hertz** hat die elektromagnetische Wellen entdeckt (in 1887 in Karlsruhe)

Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Kontinuitätsgleichung
folgt aus den M.-G.

Vektor- und Skalarpotential

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$



$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

Äquivalent

Nicht homogene Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

Die zwei nicht homogene Maxwell-Gleichungen ergeben



$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}) = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Nicht homogene Maxwell-Gleichungen

Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

Lorenz-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Maxwell-Gleichungen im freien Raum (ohne Ladungen und Ströme)

Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

Gebliedene Eichungsfreiheit

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

wenn $\nabla^2 \chi = 0$ dann gilt auch $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$

Wir wählen $\chi(\vec{r}, t) = c \int^t d\tau \phi(\vec{r}, \tau)$ so, dass $\phi' = 0$ und $\nabla^2 \chi = 0$

Wir dürfen $\phi = 0$ nehmen

Maxwell-Gleichungen im freien Raum (ohne Ladungen und Ströme)

Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 A_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 A_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\square f \equiv \nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

d'Alembert-Gleichung (Wellen-Gleichung)

Wellen-Gleichung

$$\square f \equiv \nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Nehmen wir an, dass f nur von einer Koordinate abhängt $f = f(x, t)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) f = 0$$

$$f = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

Rechts und links ausbreitende Lösungen

f_1 und f_2 beliebige Funktionen

Wellen-Gleichung (1D)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$f(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

$$f_1(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}_1(k) e^{ikx} \quad \text{da } f_1(x) \text{ ist reell, es gilt } \tilde{f}_1(k) = \tilde{f}_1^*(-k)$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int \frac{dk}{2\pi} \left\{ \left[\operatorname{Re} \tilde{f}_1(k) \right] \cos(kx) - \left[\operatorname{Im} \tilde{f}_1(k) \right] \sin(kx) \right\} \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} \{ a_1(k) \cos(kx) + b_1(k) \sin(kx) \} \end{aligned}$$

$$f(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}_1(k) e^{ik(x-ct)} + \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}_2(k) e^{ik(x+ct)}$$

Wellen-Gleichung (1D)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad f(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}_1(k) e^{ik(x-ct)} + \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}_2(k) e^{ik(x+ct)}$$

$$\omega = ck \quad f(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}_1(k) e^{i(kx-\omega t)} + \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}_2(k) e^{i(kx+\omega t)}$$

Harmonische Lösungen

$$f(x, t) = e^{i(kx-\omega t)} \quad \omega = \pm ck$$

Am Ende muss man nur den Realteil nehmen

Es reicht dann nur die folgende Lösungen zu nehmen:

$$f(x, t) = e^{i(kx-\omega t)} \quad \omega = c|k| > 0$$

dann, entspricht $k > 0$ der Rechtsausbreitung und $k < 0$ der Linksausbreitung

Wellen-Gleichung (3D)

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Harmonische Lösungen

$$f(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \omega = c|\vec{k}| > 0$$

Elektromagnetische Wellen im freien Raum

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = 0$$

Harmonische Lösungen

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = \vec{a} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \omega = c|\vec{k}|$$

aber Coulomb-Eichung fordert $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} = i(\vec{a} \cdot \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{k} = 0$$

Elektromagnetische Wellen sind Querwellen

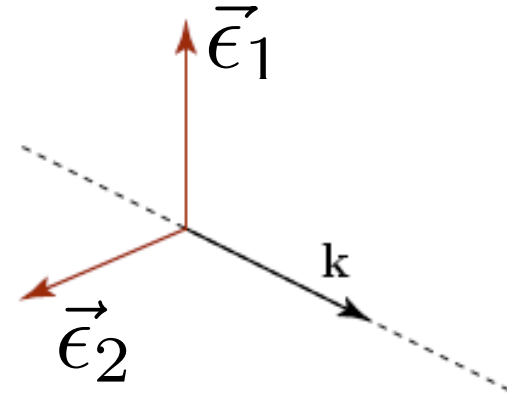
Elektromagnetische Wellen im freien Raum

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = 0$$

Harmonische Lösungen

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = (a_1 \vec{\epsilon}_1 + a_2 \vec{\epsilon}_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \omega = c|\vec{k}|$$

Elektromagnetische Wellen sind Querwellen

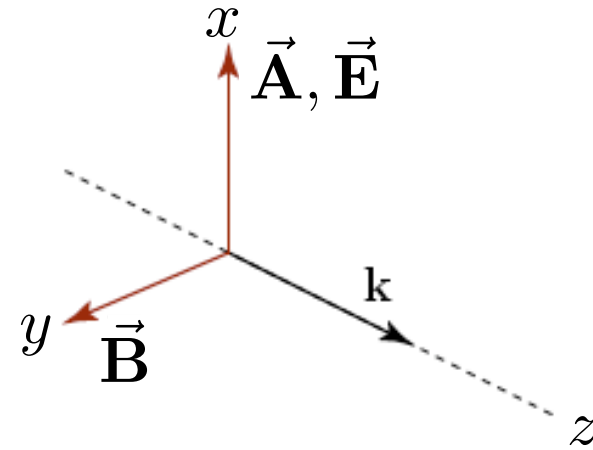


Allgemeine Lösung

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (a_{1,\vec{k}} \vec{\epsilon}_{1,\vec{k}} + a_{2,\vec{k}} \vec{\epsilon}_{2,\vec{k}}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

für Realität $a_{j,-\vec{k}} = a_{j,\vec{k}}^*$

Lineare Polarization



zum Beispiel A_0 - reell

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = A_0 \vec{e}_x e^{i(kz - \omega t)} \xrightarrow{\text{Re}} A_0 \vec{e}_x \cos(kz - \omega t)$$

$$\omega = ck > 0$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

$$= \frac{i\omega A_0}{c} \vec{e}_x e^{i(kz - \omega t)} \xrightarrow{\text{Re}} -k A_0 \vec{e}_x \sin(kz - \omega t)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} = iA_0 k \vec{e}_y e^{i(kz - \omega t)} \xrightarrow{\text{Re}} -k A_0 \vec{e}_y \sin(kz - \omega t)$$

Lineare Polarization

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = A_0 \vec{e}_x \cos(kz - \omega t)$$

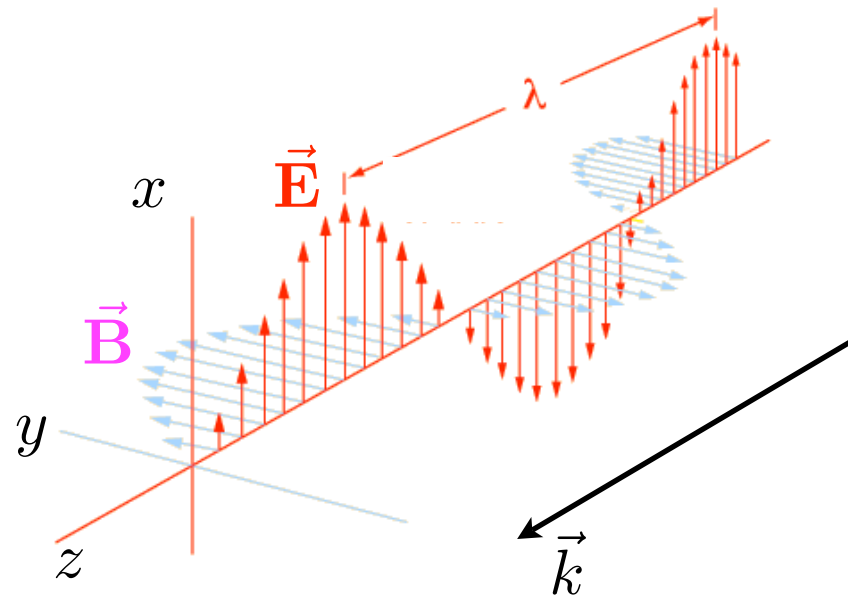
$$\vec{E} = -A_0 k \vec{e}_x \sin(kz - \omega t)$$

$$\vec{B} = -A_0 k \vec{e}_y \sin(kz - \omega t)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{|\vec{k}|} = \vec{n}_k \times \vec{E}$$

Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$



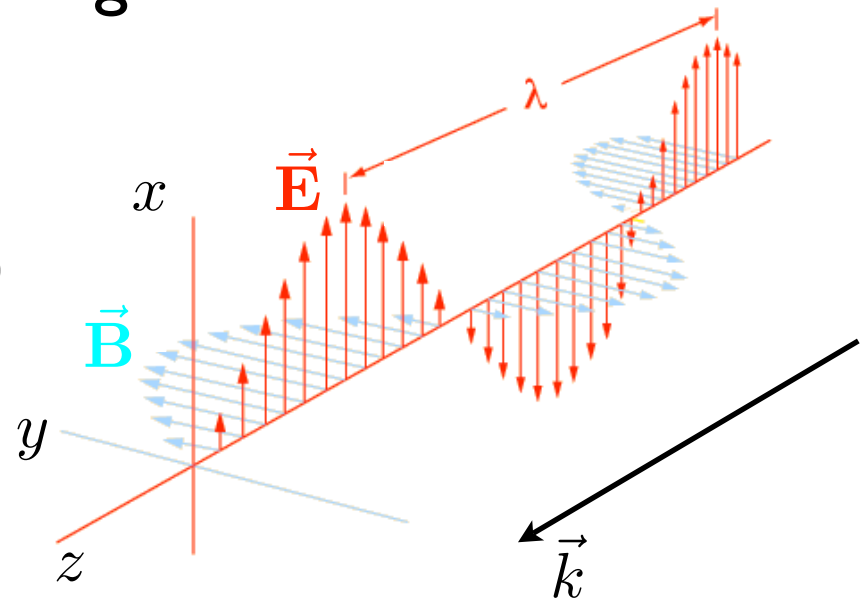
Lineare Polarization, Poynting Vektor

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = A_0 \vec{e}_x \cos(kz - \omega t)$$

$$\vec{E} = -A_0 k \vec{e}_x \sin(kz - \omega t)$$

$$\vec{B} = -A_0 k \vec{e}_y \sin(kz - \omega t)$$

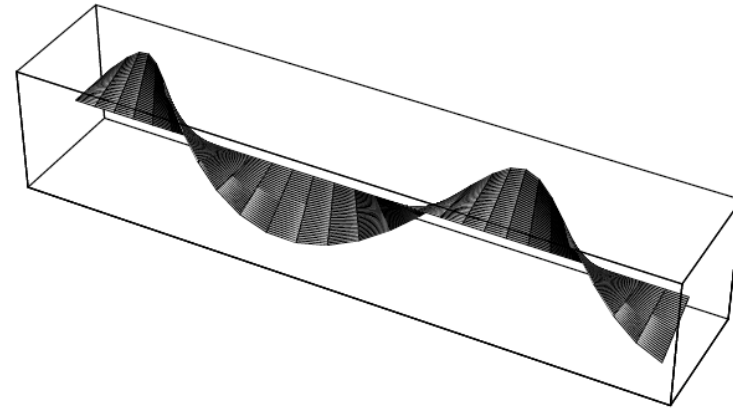
$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{|\vec{k}|} = \vec{n}_k \times \vec{E}$$



$$\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad \text{Poynting-Vektor: Fluss der Energie}$$

$$\begin{aligned} \vec{S} &\equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times (\vec{n}_k \times \vec{E})) = \frac{A_0^2 c k^2}{4\pi} \vec{e}_z \sin^2(kz - \omega t) \\ &= \frac{c |\vec{E}|^2}{4\pi} \vec{e}_z = \frac{c |\vec{B}|^2}{4\pi} \vec{e}_z = c \left(\frac{|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2}{8\pi} \right) \vec{e}_z = c W_{\text{feld}} \vec{n}_k \end{aligned}$$

Elliptische Polarization



$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = (a_x \vec{e}_x + i a_y \vec{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} \quad a_x \text{ und } a_y - \text{reell}$$

$$\xrightarrow{\text{Re}} a_x \vec{e}_x \cos(kz - \omega t) - a_y \vec{e}_y \sin(kz - \omega t)$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = -\frac{\omega}{c} (a_x \vec{e}_x \sin(kz - \omega t) + a_y \vec{e}_y \cos(kz - \omega t))$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} = -k (a_x \vec{e}_y \sin(kz - \omega t) - a_y \vec{e}_x \cos(kz - \omega t))$$

Stehende Wellen

Das elektrische Feld muss im Innen des idealen Metalls verschwinden

Randbedingung: $\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = 0$ für $z = 0$ und $z = L$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = A_0 \vec{e}_x (\sin(kz - \omega t) - \sin(-kz - \omega t))$$
$$k = \frac{2\pi n}{L} > 0$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = k A_0 \vec{e}_x (\cos(kz - \omega t) - \cos(-kz - \omega t)) \\ &= 2k A_0 \vec{e}_x \sin(kz) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{B}} &= \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} = k A_0 \vec{e}_y (\cos(kz - \omega t) + \cos(-kz - \omega t)) \\ &= 2k A_0 \vec{e}_y \cos(kz) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Elektromagnetisches Feld der bewegenden Ladungen, Strahlung

Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Kontinuitätsgleichung
folgt aus den M.-G.

Nicht homogene Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

Die zwei nicht homogene Maxwell-Gleichungen ergeben



$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}) = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Nicht homogene Maxwell-Gleichungen

Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

Lorenz-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Nicht homogene Maxwell-Gleichungen

Wir wählen die
Lorenz-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Das Ziel: für gegebenen $\rho(\vec{r}, t)$ und $\vec{j}(\vec{r}, t)$
das elektromagnetische Feld,
d.h., $\phi(\vec{r}, t)$ und $\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t)$ und $\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}, t)$,
zu bestimmen.

Nicht homogene Wellen-Gleichung

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f$$

$$\psi = (\phi, A_x, A_y, A_z)$$

$$f = (\rho, \frac{j_x}{c}, \frac{j_y}{c}, \frac{j_z}{c})$$

Wir brauchen die Green-Funktion (für die Wellen-Gleichung)

$$\left(\nabla_r^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right) G(\vec{r}, t, \vec{r}_a, t_a) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \delta(t - t_a)$$

dann

$$\psi(\vec{r}, t) = \int d^3 r_a dt_a G(\vec{r}, t, \vec{r}_a, t_a) f(\vec{r}_a, t_a) + \psi_0(\vec{r}, t)$$

wobei

$$\nabla^2 \psi_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2} = 0$$

Bestimmen der Green-Funktion

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f$$

$$\left(\nabla_r^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right) G(\vec{r}, t, \vec{r}_a, t_a) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \delta(t - t_a)$$

Fourier Transformation

$$f(\vec{r}, \omega) = \int dt f(\vec{r}, t) e^{i\omega t}$$

$$f(\vec{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} f(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

$$\psi(\vec{r}, \omega) = \int dt \psi(\vec{r}, t) e^{i\omega t}$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \psi(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}, \omega) = -4\pi f(\vec{r}, \omega)$$

$$k \equiv \frac{\omega}{c}$$

Helmholtz-Gleichung

Bestimmen der Green-Funktion

Lösen der Helmholtz-Gleichung

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{r}, \omega) = -4\pi f(\vec{r}, \omega)$$

$$k \equiv \frac{\omega}{c}$$

Green-Funktion für Helmholtz-Gleichung

$$(\nabla_r^2 + k^2)G_k(\vec{r}, \vec{r}_a) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

$$G_k^\pm(\vec{r}, \vec{r}_a) = \frac{e^{\pm ik|\vec{r} - \vec{r}_a|}}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

Hilfsmittel: In Kugel-Koordinaten lautet der Laplace-Operator

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\nabla_r^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \right) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

Bestimmen der Green-Funktion

$$\left(\nabla_r^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right) G(\vec{r}, t, \vec{r}_a, t_a) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \delta(t - t_a)$$

$$(\nabla_r^2 + k^2) G(\vec{r}, \omega, \vec{r}_a, t_a) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) e^{i\omega t_a} \quad k \equiv \frac{\omega}{c}$$

Green-Funktion der Helmholtz-Gleichung

$$(\nabla_r^2 + k^2) G_k(\vec{r}, \vec{r}_a) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \quad \longrightarrow \quad G_k^\pm(\vec{r}, \vec{r}_a) = \frac{e^{\pm ik|\vec{r} - \vec{r}_a|}}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$G^\pm(\vec{r}, \omega, \vec{r}_a, t_a) = \frac{e^{\pm ik|\vec{r} - \vec{r}_a|}}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} e^{i\omega t_a} = \frac{e^{i\omega \left(t_a \pm \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_a| \right)}}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\delta(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}$$

$$G^\pm(\vec{r}, t, \vec{r}_a, t_a) = \frac{\delta \left(t - t_a \mp \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_a| \right)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

Nicht homogene Wellen-Gleichung

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f$$

$$\psi = (\phi, A_x, A_y, A_z)$$

$$f = (\rho, \frac{j_x}{c}, \frac{j_y}{c}, \frac{j_z}{c})$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \int d^3 r_a dt_a G(\vec{r}, t, \vec{r}_a, t_a) f(\vec{r}_a, t_a) + \psi_0(\vec{r}, t)$$

$$\nabla^2 \psi_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2} = 0$$

$$G^\pm(\vec{r}, t, \vec{r}_a, t_a) = \frac{\delta(t - t_a \mp \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_a|)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \int d^3 r_a \frac{f(\vec{r}_a, t \mp \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_a|)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} + \psi_0(\vec{r}, t)$$

Kausalität nur mit G^+ (retardiert) G^- (avanciert)

Retardierte Potentiale

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3 r_a \frac{\rho(\vec{r}_a, t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_a|)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a, t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_a|)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Retardierte Potentiale

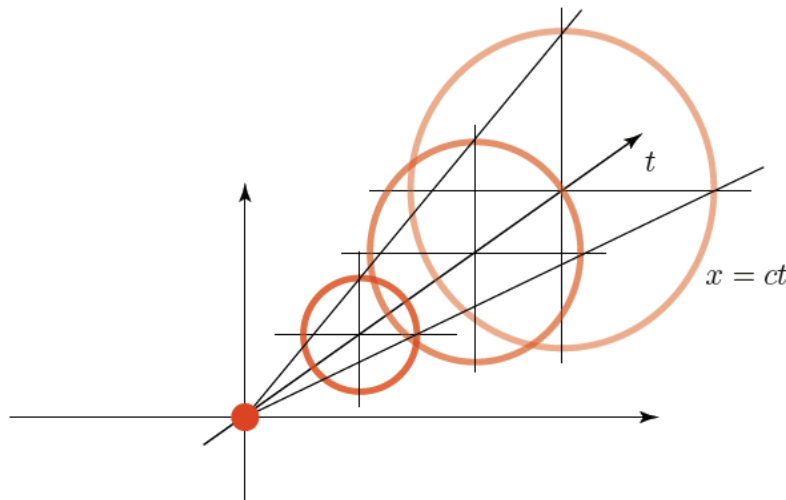
$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3 r_a \frac{\rho(\vec{r}_a, t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_a|)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a, t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_a|)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$



Strahlung



$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a, \omega) e^{ik|\vec{r} - \vec{r}_a|}}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \quad k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$G_k^+(\vec{r}, \vec{r}_a) = \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}_a|}}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \quad \text{Retardierte Green-Funktion für Helmholtz-Gleichung}$$

Es ist genügend das Vektor-Potential zu bestimmen $\omega \neq 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, \omega) - i\omega \rho(\vec{r}, \omega) = 0 \quad \rightarrow \quad \rho(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{i\omega} [\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, \omega)]$$

Im Beobachtungspunkt $\vec{r}$ es gibt keine Ströme oder Ladungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) = 0 \rightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{ic}{\omega} (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) = \frac{i}{k} (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}))$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

Strahlung



$$\vec{A}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a, \omega) e^{ik|\vec{r} - \vec{r}_a|}}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \quad k \equiv \frac{\omega}{c}$$

Wir betrachten nur den Fall $k|\vec{r}_a| \ll 2\pi$, d.h., $|\vec{r}_a| \ll \frac{2\pi}{k} = \lambda$.
Das strahlende Objekt ist viel kleiner als die Wellenlänge λ .

2 Fälle:

$$kr \ll 2\pi \rightarrow r \ll \frac{2\pi}{k} = \lambda \quad \text{das Nahfeld}$$

$$kr \gg 2\pi \rightarrow r \gg \frac{2\pi}{k} = \lambda \quad \text{das Fernfeld}$$

Strahlung das Nahfeld



$$\vec{A}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a, \omega) e^{ik|\vec{r} - \vec{r}_a|}}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \quad k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$k|\vec{r}_a| \ll 2\pi \text{ und } k|\vec{r}| \ll 2\pi \quad \rightarrow \quad k|\vec{r} - \vec{r}_a| \ll 2\pi$$

$$\vec{A}(\vec{r}, \omega) \approx \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a, \omega)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a, t)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\phi(\vec{r}, t) \approx \int d^3 r_a \frac{\rho(\vec{r}_a, t)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

Das (quasi)statische Feld

Strahlung das Fernfeld



$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a, \omega) e^{ik|\vec{r} - \vec{r}_a|}}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \quad k \equiv \frac{\omega}{c}$$

Wir interessieren uns nur für den führenden Term der als $1/r$ abklingt

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = \frac{1}{r} + \dots \quad |\vec{r} - \vec{r}_a| = r - \vec{n}_r \cdot \vec{r}_a + \dots \quad \vec{n}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3 r_a \vec{j}(\vec{r}_a, \omega) e^{-ik(\vec{n}_r \cdot \vec{r}_a)} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Strahlung das Fernfeld



$$k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{n}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{ikr}}{cr} \vec{\mathbf{g}}(k\vec{n}_r) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\vec{\mathbf{g}}(k\vec{n}) \equiv \int d^3r_a \vec{j}(\vec{r}_a, \omega) e^{-ik(\vec{n}_r \cdot \vec{r}_a)}$$

Strahlung das Fernfeld



$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, \omega) = \frac{e^{ikr}}{cr} \vec{\mathbf{g}}(k\vec{n}_r) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{\mathbf{g}}(k\vec{n}) \equiv \int d^3r_a \vec{j}(\vec{r}_a, \omega) e^{-ik(\vec{n}_r \cdot \vec{r}_a)}$$

$$\vec{n}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{B}} &= \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} = \frac{(\vec{\nabla} e^{ikr})}{cr} \times \vec{\mathbf{g}} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ &= \frac{ike^{ikr}}{cr} (\vec{n}_r \times \vec{\mathbf{g}}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = ik^{-1} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}) \approx -ike^{ikr} \frac{\vec{n}_r \times (\vec{n}_r \times \vec{\mathbf{g}})}{cr} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Strahlung das Fernfeld



$$\vec{g}(k\vec{n}) \equiv \int d^3r_a \vec{j}(\vec{r}_a, \omega) e^{-ik(\vec{n}_r \cdot \vec{r}_a)}$$

$$k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{n}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{B} \approx \frac{ike^{ikr}}{cr} (\vec{n}_r \times \vec{g})$$

$$\vec{E} \approx -\frac{ike^{ikr}}{cr} (\vec{n}_r \times (\vec{n}_r \times \vec{g})) = -\vec{n}_r \times \vec{B}$$

„Ebene“ Welle

Multipolentwicklung für das Fernfeld

Gauß'sches System



$$\vec{g}(k\vec{n}) \equiv \int d^3r_a \vec{j}(\vec{r}_a, \omega) e^{-ik(\vec{n}_r \cdot \vec{r}_a)}$$

$$k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{g}(k\vec{n}) = \vec{g}^{(0)} + \vec{g}^{(1)} + \dots$$

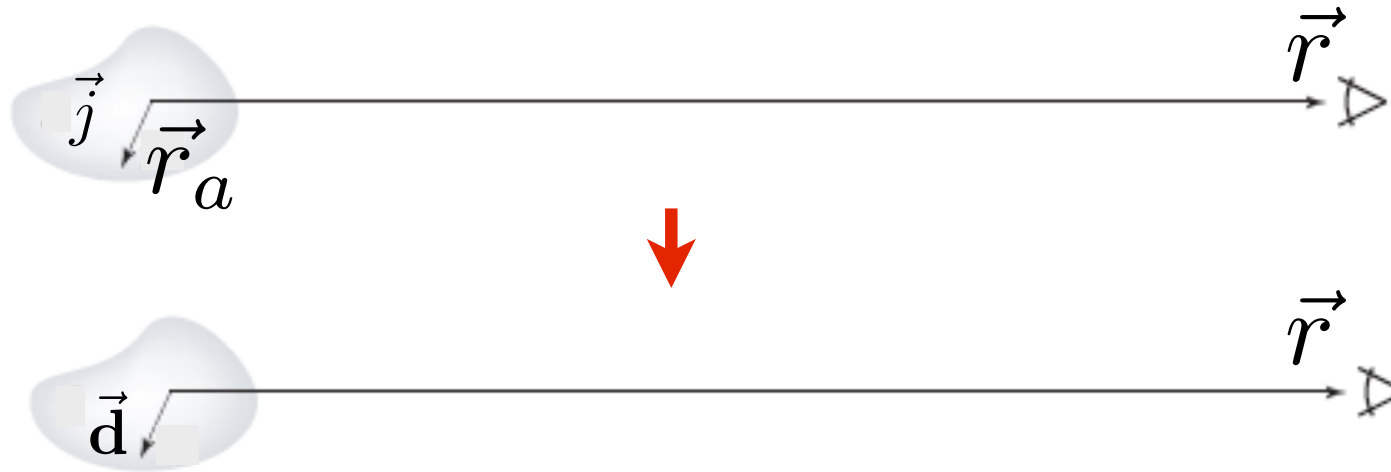
$$\vec{n}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{g}^{(0)} \equiv \int d^3r_a \vec{j}(\vec{r}_a, \omega) \quad \text{elektrischer Dipol}$$

$$\vec{g}^{(1)} \equiv -ik \int d^3r_a \vec{j}(\vec{r}_a, \omega) (\vec{n}_r \cdot \vec{r}_a)$$

magnetischer Dipol, elektrischer Quadrupol

El. Dipol-Strahlung (Hertz'sche Dipol)



$$\vec{g}^{(0)} = \int d^3 r_a \vec{j}(\vec{r}_a, \omega) = -i\omega \vec{d}(\omega) \quad k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, \omega) - i\omega \rho(\vec{r}, \omega) = 0$$

$$\int dV j_i(\vec{r}, \omega) = \int dV j_k (\nabla_k r_i) = - \int dV r_i (\nabla_k j_k) = -i\omega \int dV r_i \rho$$

Dipol-Moment

$$\vec{d}(\omega) = \int dV \vec{r} \rho(\vec{r}, \omega)$$

El. Dipol-Strahlung (Hertz'sche Dipol)



$$\vec{g}^{(0)} = -i\omega \vec{d}(\omega)$$

$$\vec{B}^{(0)} = \frac{ik e^{ikr}}{cr} \left(\vec{n}_r \times \vec{g}^{(0)} \right) = \frac{k^2 e^{ikr}}{r} (\vec{n}_r \times \vec{d})$$

$$\vec{E}^{(0)} = -\vec{n}_r \times \vec{B}^{(0)} = -\frac{k^2 e^{ikr}}{r} \left(\vec{n}_r \times (\vec{n}_r \times \vec{d}) \right)$$

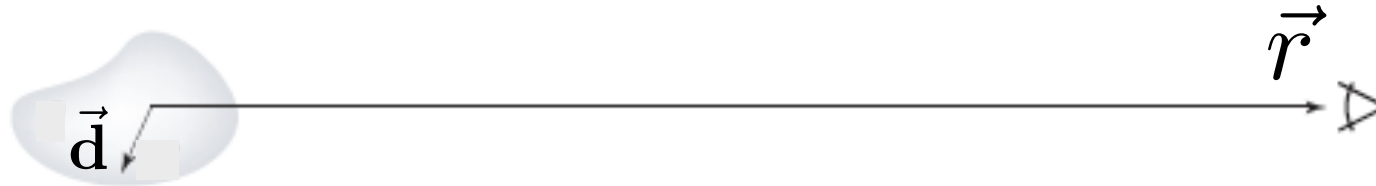
„Ebene“ Welle

Dipol-Moment

$$\vec{d} = \int dV \vec{r} \rho(\vec{r})$$

$$k \equiv \frac{\omega}{c}$$

El. Dipol-Strahlung (Hertz'sche Dipol)



Monochromatische Oszillationen

$$\vec{d}(t) = \vec{d}_0 e^{-i\omega_0 t} \quad \vec{d}(\omega) = 2\pi \vec{d}_0 \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\vec{g}^{(0)} = -i\omega \vec{d}(\omega) = -2\pi i\omega \vec{d}_0 \delta(\omega - \omega_0)$$

Dipol-Moment

$$\vec{d} = \int dV \vec{r} \rho(\vec{r})$$

$$\vec{B} \approx \frac{ik e^{ikr}}{cr} \left(\vec{n}_r \times \vec{g}^{(0)} \right) = \frac{2\pi k^2 e^{ikr}}{r} \left(\vec{n}_r \times \vec{d}_0 \right) \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\vec{E} = -\vec{n}_r \times \vec{B} \quad \text{„Ebene“ Welle}$$

$$k \equiv \frac{\omega}{c}$$

El. Dipol-Strahlung

das Fernfeld



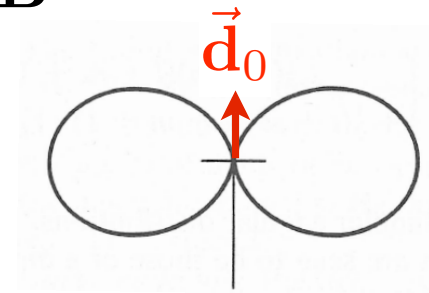
$$\vec{B} \approx k_0^2 e^{ik_0 r - i\omega_0 t} \frac{\vec{n}_r \times \vec{d}_0}{r}$$

$$k_0 \equiv \frac{\omega_0}{c}$$

$$k_0 r \gg 2\pi$$

$$\vec{E} \approx -k_0^2 e^{ik_0 r - i\omega_0 t} \frac{\vec{n}_r \times (\vec{n}_r \times \vec{d}_0)}{r} = -\vec{n}_r \times \vec{B}$$

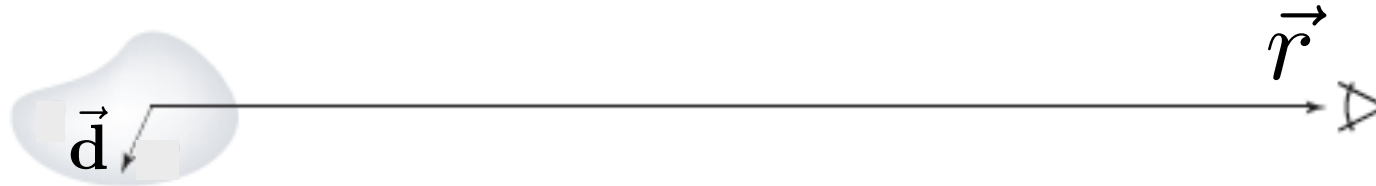
$$\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad \text{Poynting-Vektor: Fluss der Energie}$$



$$\begin{aligned} \vec{S} &\equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times (\vec{n}_r \times \vec{E})) \\ &= \frac{ck_0^4}{4\pi r^2} \cos^2(k_0 r - \omega_0 t) (\vec{d}_0^2 - (\vec{n}_r \cdot \vec{d}_0)^2) \vec{n}_r \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \langle \vec{S} \rangle_t = \frac{ck_0^4}{8\pi r^2} (\vec{d}_0^2 - (\vec{n}_r \cdot \vec{d}_0)^2) \vec{n}_r$$

El. Dipol-Strahlung

das Fernfeld



$$k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$kr \gg 2\pi$$

$$\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad \text{Poynting-Vektor: Fluss der Energie}$$

$$\begin{aligned} \vec{S} &\equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times (\vec{n}_r \times \vec{E})) \\ &= \frac{ck_0^4}{4\pi r^2} \cos^2(k_0 r - \omega_0 t) (\vec{d}_0^2 - (\vec{n}_r \cdot \vec{d}_0)^2) \vec{n}_r \rightarrow \langle \vec{S} \rangle_t = \frac{ck^4}{8\pi r^2} (\vec{d}_0^2 - (\vec{n}_r \cdot \vec{d}_0)^2) \vec{n}_r \end{aligned}$$

$$\int_S d\vec{s} \langle \vec{S} \rangle_t = \frac{ck_0^4}{8\pi r^2} \int_S d\vec{s} (\vec{d}_0^2 - (\vec{n}_r \cdot \vec{d}_0)^2) \vec{n}_r = \frac{ck_0^4 |\vec{d}_0|^2}{8\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{ck_0^4 |\vec{d}_0|^2}{3}$$

Strahlungsleistung

$$\int_S d\vec{s} \langle \vec{S} \rangle_t = \frac{\omega_0^4 |\vec{d}_0|^2}{3c^3}$$

El. Dipol-Strahlung das Nahfeld



$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a, t)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \approx \frac{1}{cr} \int d^3 r_a \vec{j}(\vec{r}_a, t) = -i \frac{k_0 e^{-i\omega_0 t}}{r} \vec{d}_0$$

$$k_0 \equiv \frac{\omega_0}{c}$$

$$k_0 r \ll 2\pi$$

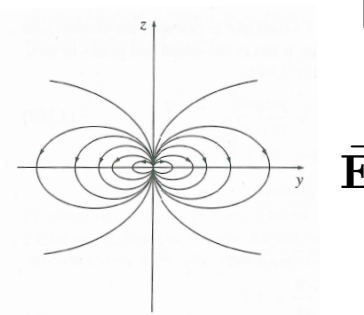
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -ik_0 e^{-i\omega_0 t} \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \times \vec{d}_0 = ik_0 e^{-i\omega_0 t} \frac{\vec{n}_r \times \vec{d}_0}{r^2}$$

$$\vec{E} = ik_0^{-1} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -e^{-i\omega_0 t} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{r} \times \vec{d}_0}{r^3} \right) = e^{-i\omega_0 t} \frac{3\vec{n}_r (\vec{n}_r \cdot \vec{d}_0) - \vec{d}_0}{r^3}$$

$$\vec{n}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r}$$

$$|\vec{B}| \sim k_0 r |\vec{E}| \ll |\vec{E}|$$

Dipol-Feld



magnetischer Dipol, elektrischer Quadrupol das Fernfeld



$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, \omega) \approx \frac{e^{ikr}}{cr} \vec{\mathbf{g}}(k\vec{n}_r)$$

$$k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{\mathbf{g}}(k\vec{n}) \equiv \int d^3r_a \vec{j}(\vec{r}_a, \omega) e^{-ik(\vec{n}_r \cdot \vec{r}_a)}$$

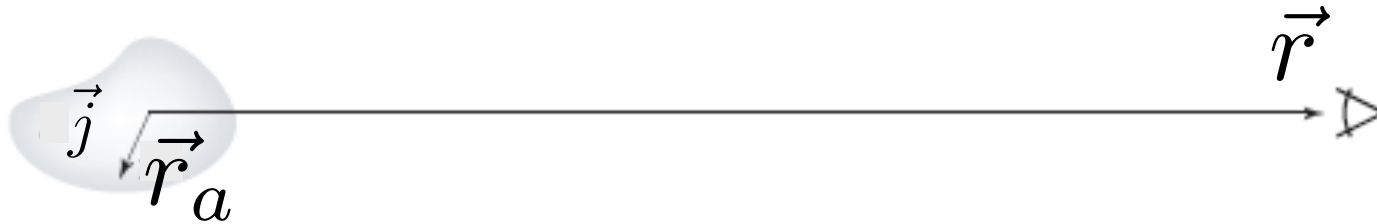
$$\vec{n}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{\mathbf{g}}(k\vec{n}) = \vec{\mathbf{g}}^{(0)} + \vec{\mathbf{g}}^{(1)} + \dots$$

$$\vec{\mathbf{g}}^{(1)} \equiv -ik \int d^3r_a \vec{j}(\vec{r}_a, \omega) (\vec{n}_r \cdot \vec{r}_a)$$

magnetischer Dipol, elektrischer Quadrupol

magnetischer Dipol, elektrischer Quadrupol das Fernfeld



$$\mathbf{g}^{(1)} \equiv -ik \int d^3 r_a \vec{j}(\vec{r}_a, \omega) (\vec{n}_r \cdot \vec{r}_a)$$

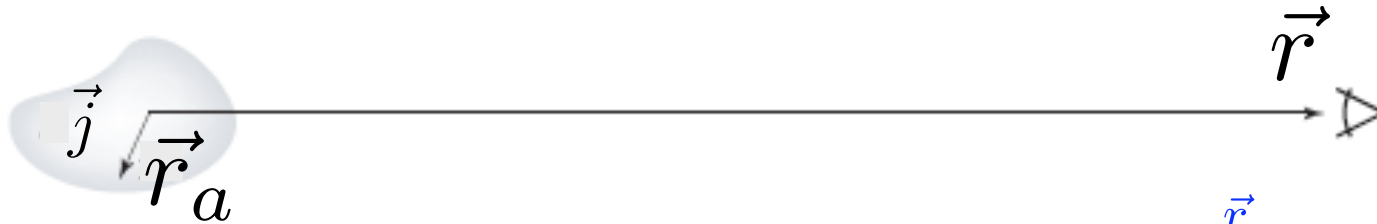
$$k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{n}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\begin{aligned} ik^{-1} \left(\mathbf{g}^{(1)} \right)_k &= n_{r,l} \int d^3 r_a j_k r_{a,l} \\ &= n_{r,l} \int d^3 r_a \left\{ \frac{(j_k r_{a,l} - j_l r_{a,k})}{2} + \frac{(j_k r_{a,l} + j_l r_{a,k})}{2} \right\} \\ &= -c(\vec{n}_r \times \vec{\mathbf{m}})_k + n_{r,l} \int d^3 r_a \frac{(j_k r_{a,l} + j_l r_{a,k})}{2} \end{aligned}$$

$$\vec{\mathbf{m}} = \frac{1}{2c} \int d^3 r_a \left[\vec{r}_a \times \vec{j}(\vec{r}_a) \right]$$

magnetischer Dipol, elektrischer Quadrupol das Fernfeld



$$\vec{g}^{(1)} \equiv -ik \int d^3 r_a \vec{j}(\vec{r}_a, \omega) (\vec{n}_r \cdot \vec{r}_a) \quad \vec{n}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r} \quad k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$ik^{-1} \left(\vec{g}^{(1)} \right)_k = -c (\vec{n}_r \times \vec{m})_k + n_{r,l} \int d^3 r_a \frac{(j_k r_{a,l} + j_l r_{a,k})}{2}$$

$$n_{r,l} \int d^3 r_a \frac{(j_k r_{a,l} + j_l r_{a,k})}{2}$$

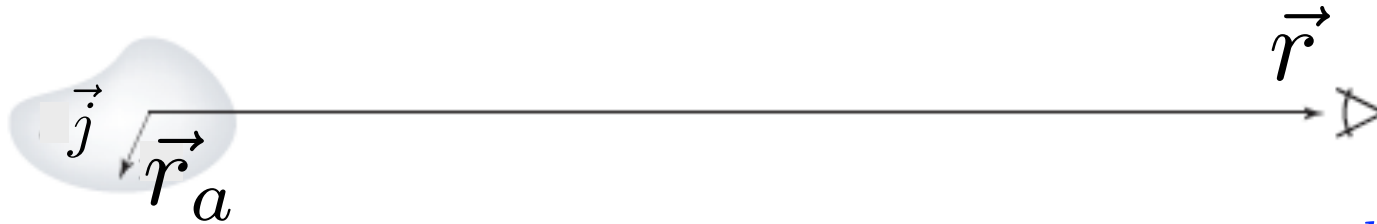
$$= n_{r,l} \int d^3 r_a \frac{j_m \nabla_m (r_{a,l} r_{a,k})}{2} = -n_{r,l} \int d^3 r_a \frac{r_{a,l} r_{a,k} (\nabla_m j_m)}{2}$$

$$= -n_{r,l} \int d^3 r_a \frac{r_{a,l} r_{a,k} (i\omega \rho)}{2} = -\frac{i\omega n_{r,l}}{2} \left[\frac{Q_{lk}^{(2)}}{3} + \frac{\delta_{lk}}{3} \int d^3 r_a (r_a^2 \rho) \right]$$

$$Q_{ij}^{(2)} = \int d^3 r_a \rho(\vec{r}_a) (3r_{a,i} r_{a,j} - r_a^2 \delta_{ij})$$

Quadrupol

magnetischer Dipol, elektrischer Quadrupol das Fernfeld



$$\vec{g}^{(1)} \equiv -ik \int d^3 r_a \vec{j}(\vec{r}_a, \omega) (\vec{n}_r \cdot \vec{r}_a)$$

$$k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{n}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r}$$

$$ik^{-1} \vec{g}^{(1)} = -c(\vec{n}_r \times \vec{m}) - \frac{i\omega n_{r,l} Q_{lk}^{(2)}}{6} \vec{e}_k - \frac{i\omega \vec{n}_r}{6} \int d^3 r_a (r_a^2 \rho)$$

Trägt nicht zu den physikalischen Felder bei

$$\vec{B}^{(1)} \approx \frac{ik e^{ikr}}{cr} \left(\vec{n}_r \times \vec{g}^{(1)} \right)$$

$$\vec{E}^{(1)} = -\vec{n}_r \times \vec{B}^{(1)}$$

$$Q_{ij}^{(2)} = \int d^3 r_a \rho(\vec{r}_a) (3r_{a,i} r_{a,j} - r_a^2 \delta_{ij})$$

Quadrupol

magnetischer Dipol

das Fernfeld



$$ik^{-1}\vec{g}^{(1)} = -c(\vec{n}_r \times \vec{m}) - \frac{i\omega n_{r,l} Q_{lk}^{(2)}}{6} \vec{e}_k - \frac{i\omega \vec{n}_r}{6} \int d^3 r_a (r_a^2 \rho)$$

$$k \equiv \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{n}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{B}^{(1,magn)} \approx -\frac{k^2 e^{ikr}}{r} (\vec{n}_r \times (\vec{n}_r \times \vec{m}))$$

$$\vec{E}^{(1,magn)} = -\vec{n}_r \times \vec{B}^{(1,magn)} = -\frac{k^2 e^{ikr}}{r} (\vec{n}_r \times \vec{m})$$

Vergleichen mit dem Hertz'schen Dipol

$$\vec{B}^{(0)} = \frac{k^2 e^{ikr}}{r} (\vec{n}_r \times \vec{d})$$

$$\vec{E}^{(0)} = -\vec{n}_r \times \vec{B}^{(0)} = -\frac{k^2 e^{ikr}}{r} (\vec{n}_r \times (\vec{n}_r \times \vec{d}))$$

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Elektromagnetisches Feld der bewegenden Ladungen, Liénard-Wichert-Potentiale

Retardierte Potentiale

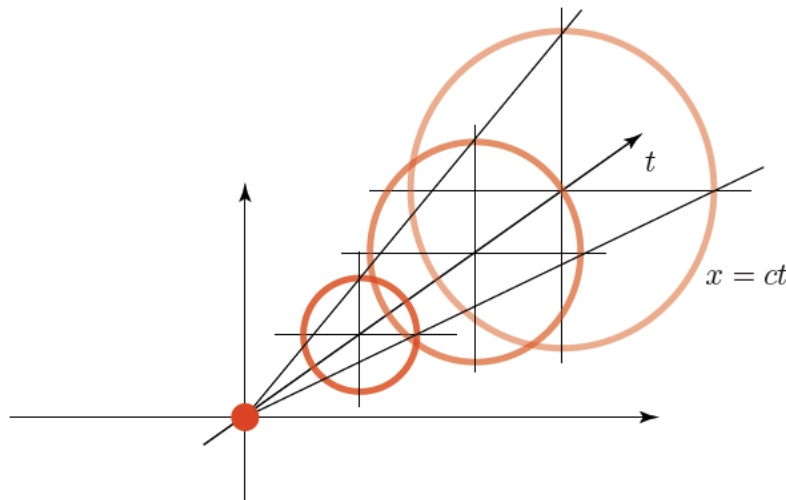
$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3 r_a \frac{\rho(\vec{r}_a, t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_a|)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a, t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_a|)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$



Liénard-Wichert-Potentiale

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3 r_a \frac{\rho(\vec{r}_a, t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_a|)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3 r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a, t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_a|)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Punktladung q befindet sich zur Zeit t im Ort $\vec{r}_0(t)$

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

$$\vec{v}_0(t) = \frac{d\vec{r}_0(t)}{dt}$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q \vec{v}_0(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

Liénard-Wichert-Potentiale

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3r_a \frac{\rho(\vec{r}_a, t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}_a|)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\rho(\vec{r}_a, t_a) = q\delta(\vec{r}_a - \vec{r}_0(t_a)) \qquad \vec{v}_0(t) = \frac{d\vec{r}_0(t)}{dt}$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3r_a \frac{q\delta(\vec{r}_a - \vec{r}_0(t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}_a|))}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

Im Ort-Zeit-Punkt $(\vec{r}, t)$ bekommen wir den Beitrag aus der Zeit τ so, dass $\tau = t - R/c$, wo $R \equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$

Die Gleichung $|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)| = c(t - \tau)$ hat immer eine Lösung

Liénard-Wichert-Potentiale

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3 r_a \frac{q \delta(\vec{r}_a - \vec{r}_0(t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_a|))}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$t'(\vec{r}_a) \equiv t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}_a|$$

$$\delta(\vec{r}_a - \vec{r}_0(t'(\vec{r}_a))) = \int d\tau \delta(\vec{r}_a - \vec{r}_0(\tau)) \delta(\tau - t'(\vec{r}_a))$$

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \int d^3 r_a d\tau \frac{q \delta(\vec{r}_a - \vec{r}_0(\tau)) \delta(\tau - t'(\vec{r}_a))}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \\ &= \int d\tau \frac{q \delta(\tau - t'(\vec{r}_0(\tau)))}{|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|} \end{aligned}$$

Liénard-Wichert-Potentiale

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d\tau \frac{q\delta(\tau - t'(\vec{r}_0(\tau)))}{|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|} = \int d\tau \frac{q\delta(\tau - t'(\vec{r}_0(\tau)))}{R(\tau)}$$

Im Ort-Zeit-Punkt $(\vec{r}, t)$ bekommen wir den Beitrag aus der Zeit τ so, dass $\tau = t - R/c$, wo $R \equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$

Die Gleichung $|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)| = c(t - \tau)$ hat immer eine Lösung

Wir definieren $\tau' \equiv \tau - t'(\vec{r}_0(\tau)) = \tau - \left(t - \frac{R(\tau)}{c}\right)$

$$\frac{d\tau'}{d\tau} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR(\tau)}{d\tau} = 1 - \frac{\vec{\mathbf{R}}(\tau)\vec{v}_0(\tau)}{cR(\tau)} \quad \vec{\mathbf{R}}(\tau) \equiv \vec{r} - \vec{r}_0(\tau)$$

$$d\tau = \frac{d\tau'}{1 - \frac{\vec{\mathbf{R}}(\tau)\vec{v}_0(\tau)}{cR(\tau)}} = \frac{R(\tau)d\tau'}{R(\tau) - \frac{\vec{\mathbf{R}}(\tau)\vec{v}_0(\tau)}{c}}$$

Liénard-Wichert-Potentiale

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d\tau \frac{q\delta(\tau - t'(\vec{r}_0(\tau)))}{R(\tau)}$$

$$\vec{\mathbf{R}}(\tau) \equiv \vec{r} - \vec{r}_0(\tau)$$

$$d\tau = \frac{d\tau'}{1 - \frac{\vec{\mathbf{R}}(\tau)\vec{v}_0(\tau)}{cR(\tau)}} = \frac{R(\tau)d\tau'}{R(\tau) - \frac{\vec{\mathbf{R}}(\tau)\vec{v}_0(\tau)}{c}}$$

$$R(\tau) \equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{q\delta(\tau')d\tau'}{R(\tau) - \frac{\vec{\mathbf{R}}(\tau)\vec{v}_0(\tau)}{c}} = \frac{q}{R(\tau) - \frac{\vec{\mathbf{R}}(\tau)\vec{v}_0(\tau)}{c}}$$

Im Ort-Zeit-Punkt $(\vec{r}, t)$ bekommen wir den Beitrag aus der Zeit τ so, dass $\tau = t - R/c$, wo $R \equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$

Die Gleichung $|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)| = c(t - \tau)$ hat immer eine Lösung

Genauso für $\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t)$

Liénard-Wichert-Potentiale

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{R(\tau) - \frac{\vec{\mathbf{R}}(\tau) \vec{v}_0(\tau)}{c}}$$

$$\vec{\mathbf{R}}(\tau) \equiv \vec{r} - \vec{r}_0(\tau)$$

$$R(\tau) \equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\frac{q \vec{v}_0(\tau)}{c}}{R(\tau) - \frac{\vec{\mathbf{R}}(\tau) \vec{v}_0(\tau)}{c}}$$

Im Ort-Zeit-Punkt $(\vec{r}, t)$ bekommen wir den Beitrag aus der Zeit τ so, dass $\tau = t - R/c$, wo $R \equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$

Die Gleichung $|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)| = c(t - \tau)$ hat immer eine Lösung

Das elektrische Feld

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{R(\tau) - \frac{\vec{\mathbf{R}}(\tau) \vec{v}_0(\tau)}{c}}$$

$$\vec{\mathbf{R}}(\tau) \equiv \vec{r} - \vec{r}_0(\tau)$$

$$R(\tau) \equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\frac{q \vec{v}_0(\tau)}{c}}{R(\tau) - \frac{\vec{\mathbf{R}}(\tau) \vec{v}_0(\tau)}{c}}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

$$\tau(\vec{r}, t) \qquad \frac{\partial \tau(\vec{r}, t)}{\partial t} =? \qquad \vec{\nabla} [\tau(\vec{r}, t)] =?$$

Hilfsmittel

$$\vec{\mathbf{R}}(\tau) \equiv \vec{r} - \vec{r}_0(\tau)$$

$$R(\tau) \equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$$

$$R(\tau) = |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)| = c(t - \tau)$$

ergibt

$$\tau(\vec{r}, t)$$

wir brauchen $\frac{\partial \tau(\vec{r}, t)}{\partial t}$ und $\frac{\partial \tau(\vec{r}, t)}{\partial r_k}$

Hilfsmittel

$$\vec{\mathbf{R}}(\tau) \equiv \vec{r} - \vec{r}_0(\tau)$$

$$\vec{v}_0(\tau) \equiv \frac{d\vec{r}_0(\tau)}{d\tau}$$

$$\vec{a}_0(\tau) \equiv \frac{d\vec{v}_0(\tau)}{d\tau}$$

$$R(\tau) \equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$$

$$R(\tau) = |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)| = c(t - \tau)$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -\vec{v}_0 \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\vec{R}}{R} \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -\frac{(\vec{R} \cdot \vec{v}_0)}{R} \frac{\partial \tau}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{R}{\left[R - \frac{(\vec{R} \cdot \vec{v}_0)}{c} \right]}$$

Hilfsmittel

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{R}}(\tau) &\equiv \vec{r} - \vec{r}_0(\tau) & \vec{v}_0(\tau) &\equiv \frac{d\vec{r}_0(\tau)}{d\tau} & \vec{a}_0(\tau) &\equiv \frac{d\vec{v}_0(\tau)}{d\tau} \\ R(\tau) &\equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|\end{aligned}$$

$$R(\tau) = |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)| = c(t - \tau)$$

$$\frac{\partial R_i}{\partial r_k} = \delta_{ik} - v_{0,i} \frac{\partial \tau}{\partial r_k}$$

$$\frac{\partial R}{\partial r_k} = \frac{R_i}{R} \frac{\partial R_i}{\partial r_k} = \frac{R_k}{R} - \frac{R_i v_{0,i}}{R} \frac{\partial \tau}{\partial r_k} = -c \frac{\partial \tau}{\partial r_k}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r_k} = - \frac{R_k}{c \left[R - \frac{(\vec{R} \cdot \vec{v}_0)}{c} \right]}$$

Das elektrische Feld

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{R(\tau) - \frac{\vec{\mathbf{R}}(\tau) \vec{v}_0(\tau)}{c}}$$

$$\vec{\mathbf{R}}(\tau) \equiv \vec{r} - \vec{r}_0(\tau)$$

$$R(\tau) \equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$$

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\frac{q \vec{v}_0(\tau)}{c}}{R(\tau) - \frac{\vec{\mathbf{R}}(\tau) \vec{v}_0(\tau)}{c}}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}} &= \frac{q \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)}{\left[R - \frac{(\vec{R} \cdot \vec{v}_0)}{c}\right]^3} \left(\vec{R} - \frac{R \vec{v}_0}{c}\right) \\ &+ \frac{q}{c^2 \left[R - \frac{(\vec{R} \cdot \vec{v}_0)}{c}\right]^3} \left[\vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{R \vec{v}_0}{c}\right) \times \vec{a}_0\right]\right] \end{aligned}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{R} \left(\vec{R} \times \vec{\mathbf{E}}\right)$$

Das Strahlungsfeld

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_v + \vec{\mathbf{E}}_{\text{rad}}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_v = \frac{q \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)}{\left[R - \frac{(\vec{R} \cdot \vec{v}_0)}{c}\right]^3} \left(\vec{R} - \frac{R\vec{v}_0}{c}\right) \sim \frac{1}{R^2}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{rad}} = \frac{q}{c^2 \left[R - \frac{(\vec{R} \cdot \vec{v}_0)}{c}\right]^3} \left[\vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{R\vec{v}_0}{c}\right) \times \vec{a}_0 \right] \right] \sim \frac{1}{R}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{R} \left(\vec{R} \times \vec{\mathbf{E}} \right)$$

Das Strahlungsfeld

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{rad}} = \frac{q}{c^2 \left[R - \frac{(\vec{R} \cdot \vec{v}_0)}{c} \right]^3} \left[\vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{R\vec{v}_0}{c} \right) \times \vec{a}_0 \right] \right] \sim \frac{1}{R}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_{\text{rad}} = \frac{1}{R} \left(\vec{R} \times \vec{\mathbf{E}}_{\text{rad}} \right)$$

Nichtrelativistischer Grenzfall: $v_0 \ll c$

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{rad}} \approx \frac{q}{c^2 R^3} \left[\vec{R} \times \left[\vec{R} \times \vec{a}_0 \right] \right] = \frac{q}{c^2 R} \left[\vec{n}_R \times \left[\vec{n}_R \times \vec{a}_0 \right] \right]$$

$$\vec{\mathbf{B}}_{\text{rad}} = \vec{n}_R \times \vec{\mathbf{E}}_{\text{rad}}$$

Das Strahlungsfeld

Nichtrelativistischer Grenzfall: $v_0 \ll c$

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{rad}} \approx \frac{q}{c^2 R} [\vec{n}_R \times [\vec{n}_R \times \vec{a}_0]]$$

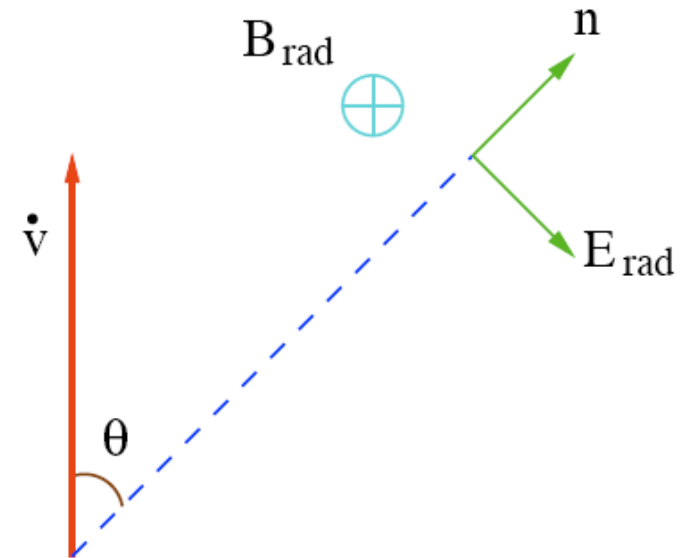
$$\vec{\mathbf{B}}_{\text{rad}} = \vec{n}_R \times \vec{\mathbf{E}}_{\text{rad}}$$

$$\vec{a}_0(\tau) \equiv \frac{d\vec{v}_0(\tau)}{d\tau}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{S}} &\equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}) = \frac{c}{4\pi} (\vec{\mathbf{E}} \times (\vec{n}_R \times \vec{\mathbf{E}})) \\ &= \frac{q^2 |\vec{a}_0|^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2 \theta \vec{n}_R \end{aligned}$$

$$\int_S d\vec{s} \vec{\mathbf{S}} = \frac{q^2 |\vec{a}_0|^2}{4\pi c^3 R^2} \int_S d\vec{s} \sin^2 \theta \vec{n}_r = \frac{2q^2 |\vec{a}_0|^2}{3c^3}$$

Larmor-Formel



Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Elektromagnetisches Feld in der Materie

Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Kontinuitätsgleichung
folgt aus den M.-G.

Mikroskopische Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{e}} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{b}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{e}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{b}}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Kontinuitätsgleichung
folgt aus den M.-G.

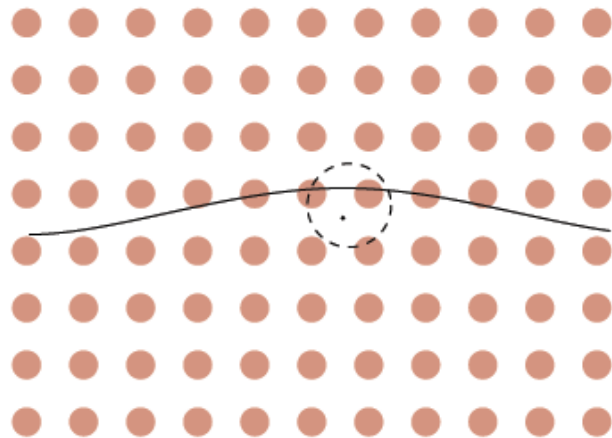
Makroskopische Felder

$$\vec{\mathbf{E}} \equiv \langle \vec{\mathbf{e}} \rangle$$

$$\vec{\mathbf{B}} \equiv \langle \vec{\mathbf{b}} \rangle$$

$$\langle f \rangle(\vec{r}) \equiv \int d^3r_a g(\vec{r} - \vec{r}_a) f(\vec{r}_a)$$

$$\int d^3r_a g(\vec{r} - \vec{r}_a) = 1$$



$$g(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

Makroskopische Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi \langle \rho \rangle$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle$$

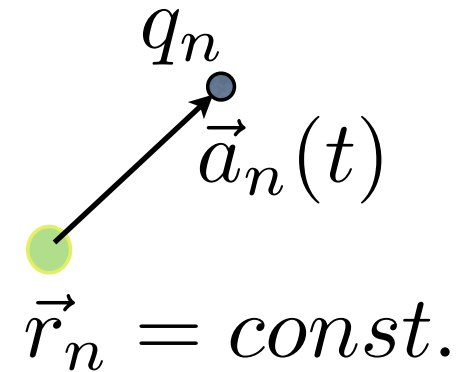
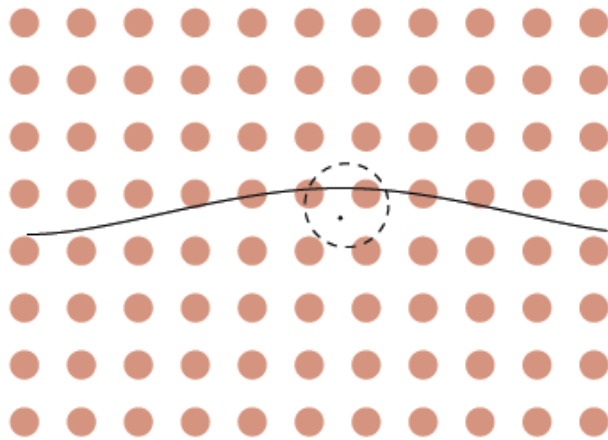
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{j} \rangle + \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} = 0$$

Kontinuitätsgleichung
folgt aus den M.-G.

Gebundene Ladungen



$$\rho_{\text{geb}}(\vec{r}) = \sum_n q_n \delta(\vec{r} - (\vec{r}_n + \vec{a}_n))$$

$$\langle f \rangle(\vec{r}) \equiv \int d^3 r_a g(\vec{r} - \vec{r}_a) f(\vec{r}_a)$$

$$\langle \rho_{\text{geb}} \rangle = \int d^3 r_a g(\vec{r} - \vec{r}_a) \rho_{\text{geb}}(\vec{r}_a) = ?$$

Gebundene Ladungen

$$\begin{aligned}
 \langle \rho_{\text{geb}} \rangle &= \int d^3 r_a g(\vec{r} - \vec{r}_a) \sum_n q_n \delta(\vec{r}_a - (\vec{r}_n + \vec{a}_n)) \\
 &= \sum_n q_n g(\vec{r} - (\vec{r}_n + \vec{a}_n)) = \sum_n q_n g(\vec{r} - \vec{r}_n) \\
 &\quad - \sum_n q_n (\vec{a}_n \cdot \vec{\nabla}_r g(\vec{r} - \vec{r}_n)) + \frac{1}{2} \sum_n q_n [\nabla_{r,i} \nabla_{r,j} g(\vec{r} - \vec{r}_n)] a_{n,i} a_{n,j} + \dots \\
 &= \sum_n q_n g(\vec{r} - \vec{r}_n) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \langle \rho_{\text{geb}}^{(0)} \rangle - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_i \equiv \sum_n q_n a_{n,i} g(\vec{r} - \vec{r}_n) - \frac{1}{2} \sum_n q_n [\nabla_{r,j} g(\vec{r} - \vec{r}_n)] a_{n,i} a_{n,j} + \dots$$

$$\vec{P} \equiv \sum_n q_n \vec{a}_n g_n - \frac{1}{2} \sum_n q_n \vec{a}_n (\vec{\nabla} g_n \cdot \vec{a}_n) + \dots \quad g_n \equiv g(\vec{r} - \vec{r}_n)$$

$$\vec{P} = \sum_n \vec{d}_n g(\vec{r} - \vec{r}_n) + \dots \quad \vec{d}_n \equiv q_n \vec{a}_n$$

dielektrische Polarisierung - gemittelte Dipol-Moment-Dichte
 (+ Quadrupol-Beitrag + ...)

Dielektrische Verschiebung (Induktion)

$$\vec{\mathbf{P}} \equiv \sum_n \vec{a}_n q_n g_n - \frac{1}{2} \sum_n q_n \vec{a}_n (\vec{\nabla} g_n \cdot \vec{a}_n) + \dots \quad \text{Polarisation}$$

$$\langle \rho_{\text{geb}} \rangle = \sum_n q_n g(\vec{r} - \vec{r}_n) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}} = \langle \rho_{\text{geb}}^{(0)} \rangle - \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}}$$

Üblicherweise gilt $\langle \rho_{\text{geb}}^{(0)} \rangle = 0$, da die Substanz neutral ist

$$\langle \rho \rangle = \langle \rho_{\text{geb}} \rangle + \langle \rho_{\text{frei}} \rangle = \langle \rho_{\text{frei}} \rangle - \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi \langle \rho \rangle = 4\pi \langle \rho_{\text{frei}} \rangle - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}}$$

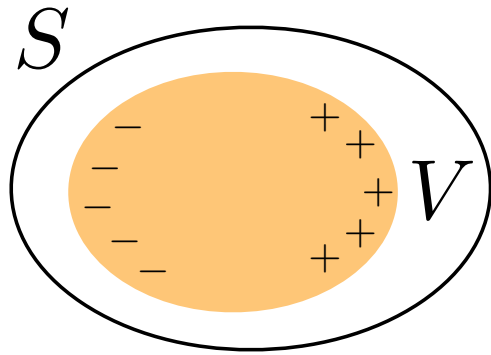
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{E}} + 4\pi \vec{\mathbf{P}}) = 4\pi \langle \rho_{\text{frei}} \rangle$$

$$\vec{\mathbf{D}} \equiv \vec{\mathbf{E}} + 4\pi \vec{\mathbf{P}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = 4\pi \langle \rho_{\text{frei}} \rangle$$

dielektrische Verschiebung (Induktion)

Allgemeine Überlegung



$$\int_V dV \langle \rho_{\text{geb}} \rangle = 0$$

es muss ein $\vec{\mathbf{P}}$ existieren so, dass

$$\langle \rho_{\text{geb}} \rangle = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}}$$

$$\int_V dV \langle \rho_{\text{geb}} \rangle = - \int_S d\vec{S} \vec{\mathbf{P}} = 0$$

Makroskopische Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = 4\pi \langle \rho_{\text{frei}} \rangle$$

$$\vec{\mathbf{D}} \equiv \vec{\mathbf{E}} + 4\pi \vec{\mathbf{P}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0$$

Strom der gebundenen Ladungen

$$\vec{j}_{\text{geb}}(\vec{r}) = \sum_n q_n \dot{\vec{a}}_n \delta(\vec{r} - (\vec{r}_n + \vec{a}_n)) \quad \langle f \rangle(\vec{r}) \equiv \int d^3r_a g(\vec{r} - \vec{r}_a) f(\vec{r}_a)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{j}_{\text{geb}} \rangle &= \int d^3r_a g(\vec{r} - \vec{r}_a) \sum_n q_n \dot{\vec{a}}_n \delta(\vec{r}_a - (\vec{r}_n + \vec{a}_n)) \\ &= \sum_n q_n \dot{\vec{a}}_n g(\vec{r} - (\vec{r}_n + \vec{a}_n)) \quad g_n \equiv g(\vec{r} - \vec{r}_n) \\ &= \sum_n q_n \dot{\vec{a}}_n g_n - \sum_n \dot{\vec{a}}_n q_n (\vec{a}_n \cdot \vec{\nabla} g_n) \\ &= \sum_n q_n \dot{\vec{a}}_n g_n + \frac{1}{2} \sum_n q_n \left[\vec{\nabla} g_n \times (\vec{a}_n \times \dot{\vec{a}}_n) \right] - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_n q_n \vec{a}_n (\vec{\nabla} g_n \cdot \vec{a}_n) \end{aligned}$$

$$\langle \vec{j}_{\text{geb}} \rangle = \frac{d\vec{P}}{dt} + c(\vec{\nabla} \times \vec{M})$$

$$\vec{M} \equiv \frac{1}{2c} \sum_n q_n g_n (\vec{a}_n \times \dot{\vec{a}}_n) = \sum_n g_n \vec{m}_n$$

Magnetisierung

Strom der gebundenen Ladungen

$$\langle \vec{j}_{\text{geb}} \rangle = \frac{d\vec{P}}{dt} + c(\vec{\nabla} \times \vec{M}) = \langle \vec{j}_{\text{pol}} \rangle + \langle \vec{j}_{\text{m}} \rangle$$

$$\vec{M} \equiv \frac{1}{2c} \sum_n q_n g_n (\vec{a}_n \times \dot{\vec{a}}_n) = \sum_n g_n \vec{m}_n \quad \text{Magnetisierung}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{j}_{\text{pol}} \rangle + \frac{\partial \langle \rho_{\text{pol}} \rangle}{\partial t} = 0 \quad \langle \rho_{\text{pol}} \rangle = \langle \rho_{\text{geb}} \rangle = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{j}_{\text{m}} \rangle = 0$$

$\langle \vec{j}_{\text{pol}} \rangle$ Längsstrom
 $\langle \vec{j}_{\text{m}} \rangle$ Querstrom

Makroskopische Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle$$

$$\langle \vec{j} \rangle = \langle \vec{j}_{\text{frei}} \rangle + \langle \vec{j}_{\text{geb}} \rangle$$

$$\langle \vec{j}_{\text{geb}} \rangle = \frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} + c(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{M}})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{\text{frei}} \rangle$$

$$\vec{\mathbf{H}} \equiv \vec{\mathbf{B}} - 4\pi \vec{\mathbf{M}} \quad \text{Magnetfeld}$$

Makroskopische Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = 4\pi \langle \rho_{\text{frei}} \rangle = 4\pi \rho$$

$$\vec{\mathbf{D}} \equiv \vec{\mathbf{E}} + 4\pi \vec{\mathbf{P}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{\text{frei}} \rangle = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\mathbf{H}} \equiv \vec{\mathbf{B}} - 4\pi \vec{\mathbf{M}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

Äquivalent

Dielektrizitätskonstante

Für viele Substanzen (für schwache Felder) gilt

$$\vec{\mathbf{P}} = \chi_e \vec{\mathbf{E}}$$

χ_e - elektrische Suszeptibilität

$$\vec{\mathbf{D}} \equiv \vec{\mathbf{E}} + 4\pi\vec{\mathbf{P}} = (1 + 4\pi\chi_e)\vec{\mathbf{E}} = \epsilon\vec{\mathbf{E}}$$

$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$ - Dielektrizitätskonstante

Permeabilität

Für viele Substanzen (für schwache Felder) gilt

$$\vec{\mathbf{M}} = \chi_m \vec{\mathbf{H}}$$

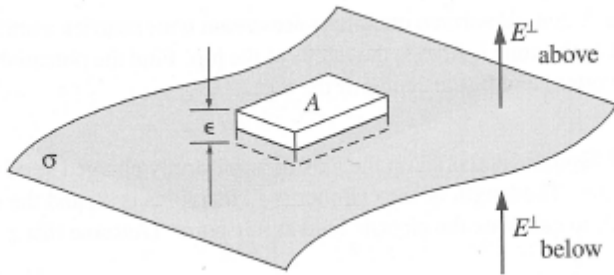
χ_m - magnetische Suszeptibilität

$$\vec{\mathbf{B}} \equiv \vec{\mathbf{H}} + 4\pi\vec{\mathbf{M}} = (1 + 4\pi\chi_m)\vec{\mathbf{H}} = \mu\vec{\mathbf{H}}$$

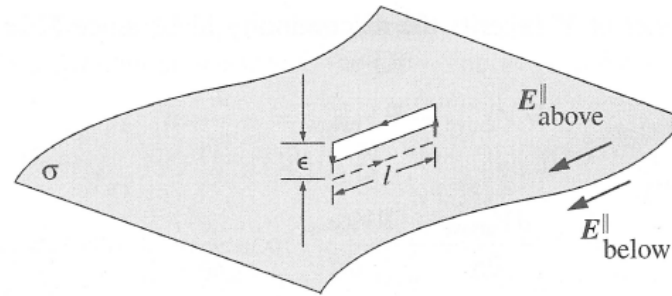
$\mu = 1 + 4\pi\chi_m$ - Permeabilität

Randbedingungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$$



$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$



$$D_{\text{above},\perp} - D_{\text{below},\perp} = 4\pi\sigma$$

$$E_{\text{above},\parallel} = E_{\text{below},\parallel}$$

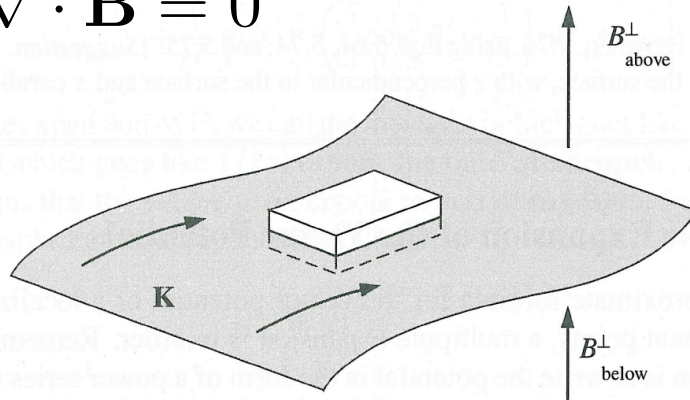
Auf der Grenze zwischen Dielektrika gibt es keine freie
Oberfläche-Ladungen

$$D_{\text{above},\perp} = D_{\text{below},\perp}$$

$$\phi_{\text{above}} = \phi_{\text{below}}$$

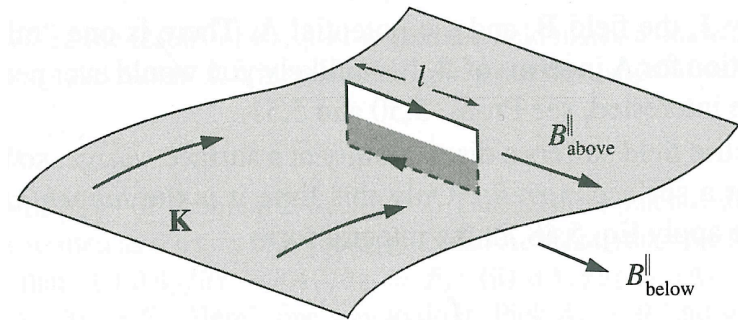
Randbedingungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$



$$B_{\text{above},\perp} = B_{\text{below},\perp}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$



$$H_{\text{above},\parallel} - H_{\text{below},\parallel} = \frac{4\pi}{c} (\vec{K} \times \vec{n})$$

Auf der Grenze zwischen Dielektrika gibt es keine freie
Oberfläche-Ströme

$$H_{\text{above},\parallel} = H_{\text{below},\parallel}$$

Energie des elektromagnetischen Feldes in der Materie

$$\vec{\mathbf{H}} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0 \right] \quad \text{minus} \quad \vec{\mathbf{E}} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right]$$



$$\frac{1}{c} \vec{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{H}} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) + \vec{\mathbf{E}} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

$$\frac{1}{c} \vec{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{\mathbf{E}} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}})$$

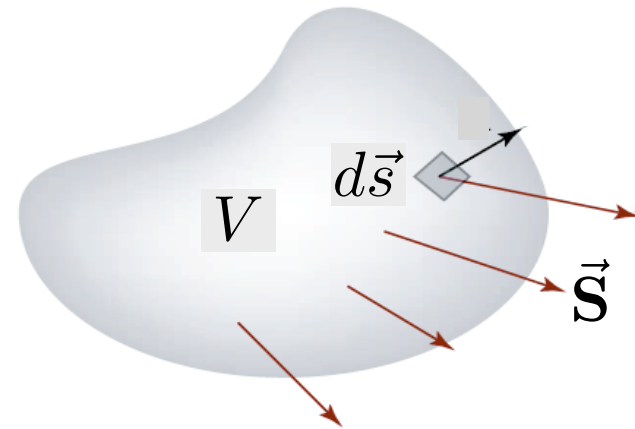
$$\frac{1}{4\pi} \left(\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\mathbf{B}} \right) = \left[-\vec{j} \cdot \vec{\mathbf{E}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{S}} \right] \cdot dt$$

$$\vec{\mathbf{S}} \equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) \quad \text{Poynting-Vektor}$$

Energie des elektromagnetischen Feldes in der Materie

$$\frac{1}{4\pi} \left(\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\mathbf{B}} \right) = \left[-\vec{j} \cdot \vec{\mathbf{E}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{S}} \right] \cdot dt$$

$$\vec{\mathbf{S}} \equiv \frac{c}{4\pi} \left(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}} \right) \quad \text{Poynting-Vektor}$$



$$\frac{1}{dt} \int_V dV \left(\frac{\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\mathbf{B}}}{4\pi} \right) = - \int_V dV (\vec{j} \cdot \vec{\mathbf{E}}) - \int_{S(V)} d\vec{s} \cdot \vec{\mathbf{S}}$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$\int_V dV (\vec{j} \cdot \vec{\mathbf{E}}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}_i) = \frac{d}{dt} W_{EM}$$

W_{EM} - Arbeit geleistet vom e.-m. Feld auf geladenen Teilchen

Energie des elektromagnetischen Feldes in der Materie

$$\frac{d}{dt} U_{feld}(V) = -\frac{d}{dt} W_{EM}(V) - \int_{S(V)} d\vec{s} \cdot \vec{S}$$

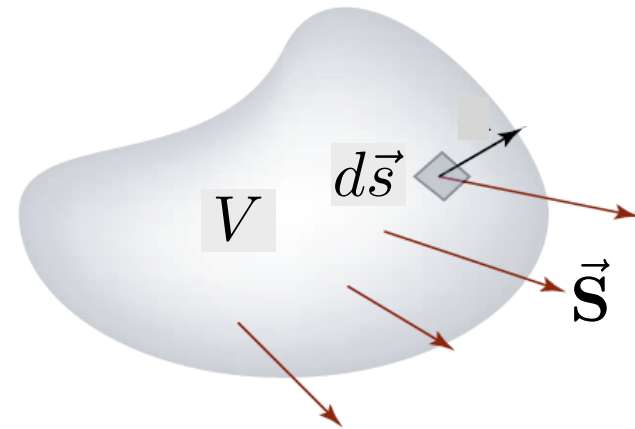
$$\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) \quad \text{Poynting-Vektor}$$

$$\int_V dV (\vec{j} \cdot \vec{E}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i) = \frac{d}{dt} W_{EM}$$

W_{EM} - Arbeit geleistet vom e.-m. Feld auf geladenen Teilchen

$$dU_{feld}(V) = \int_V dV \left(\frac{\vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B}}{4\pi} \right) - \text{Energie des e.-m. Feldes im Volumen } V$$

$\vec{S}$ - Fluss der Energie des Feldes



Energie des elektromagnetischen Feldes in der Materie

$$\frac{d}{dt} U_{feld}(V) = -\frac{d}{dt} W_{EM}(V) - \int_{S(V)} d\vec{s} \cdot \vec{S}$$

$$\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) \quad \text{Poynting-Vektor}$$

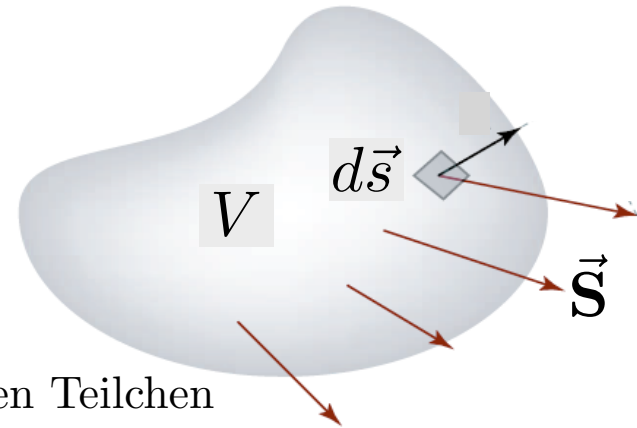
W_{EM} - Arbeit geleistet vom e.-m. Feld auf geladenen Teilchen

$$dU_{feld}(V) = \int_V dV \left(\frac{\vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B}}{4\pi} \right)$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{B} &\equiv \vec{H} + 4\pi\vec{M} = (1 + 4\pi\chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H} \\ \vec{D} &\equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P} = (1 + 4\pi\chi_e)\vec{E} = \epsilon\vec{E} \end{aligned}$$

$$U_{feld}(V) = \int_V dV \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}}{8\pi} \right)$$



Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Elektromagnetisches Feld in der Materie

Elektrostatische Gleichungen ohne freie Ladungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

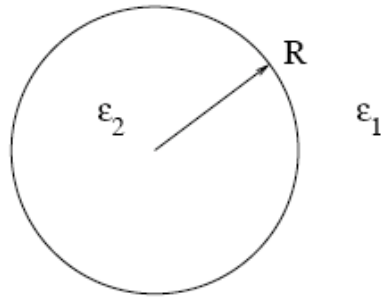
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

Laplace Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = (\vec{\nabla} \epsilon) \cdot \vec{E} + \epsilon (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$$

Nur wenn $\epsilon = \text{const.}$ gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ und $\nabla^2 \phi = 0$

Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld



$$\vec{\mathbf{E}}(r \gg R) = \vec{\mathbf{E}}_1 = E_1 \vec{e}_z = \text{const.}$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = ? \quad \vec{\mathbf{D}}(\vec{r}) = ? \quad \vec{\mathbf{P}}(\vec{r}) = ?$$

Elektrostatistische Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = 0$$

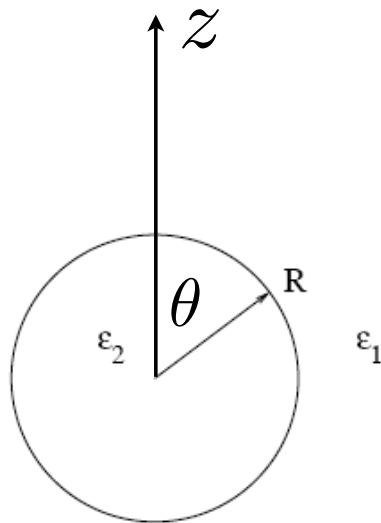
$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} \phi$$

Laplace Gleichung

$$\nabla^2 \phi = 0 \text{ für } r > R \text{ und } r < R$$

Symmetrie



Laplace Gleichung

$$\nabla^2 \phi = 0 \text{ für } r > R \text{ und } r < R$$

$$\vec{\mathbf{E}}(r \gg R) = \vec{\mathbf{E}}_1 = E_1 \vec{e}_z = \text{const.}$$

$$\phi(r \gg R) = -E_1 z = -E_1 r \cos \theta$$

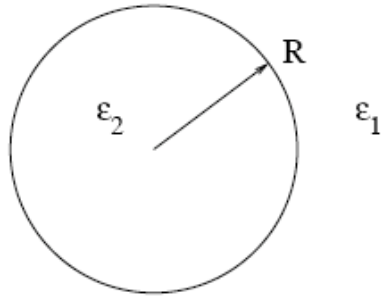
Allgemeine Lösung der Laplace Gleichung

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} \cdot r^l + B_{lm} \cdot r^{-(l+1)} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\phi(\vec{r}) = \phi(r, \theta) \quad \rightarrow \quad \text{nur } m = 0 \text{ ist erlaubt}$$

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_{l0} \cdot r^l + B_{l0} \cdot r^{-(l+1)} \right) Y_{l0}(\theta)$$

Randbedingungen



$$\epsilon_1 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R+0} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R-0}$$

$$\mathbf{D}_{\text{above},\perp} = \mathbf{D}_{\text{below},\perp}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Big|_{r=R+0} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Big|_{r=R-0}$$

$$\mathbf{E}_{\text{above},\parallel} = \mathbf{E}_{\text{below},\parallel}$$

$$\phi \Big|_{r=R+0} = \phi \Big|_{r=R-0}$$

$$\phi_{\text{above}} = \phi_{\text{below}}$$

Elektrostatische Gleichungen

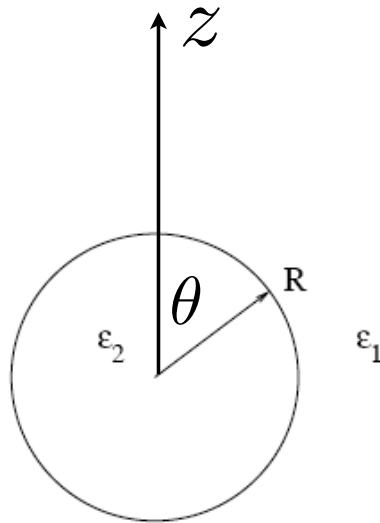
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = 0$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} \phi$$

Ansatz



$$\phi(r \gg R) = -E_1 z = -E_1 r \cos \theta$$

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_{l0} \cdot r^l + B_{l0} \cdot r^{-(l+1)} \right) Y_{l0}(\theta)$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R+0} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R-0}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Big|_{r=R+0} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Big|_{r=R-0}$$

$$\phi \Big|_{r=R+0} = \phi \Big|_{r=R-0}$$

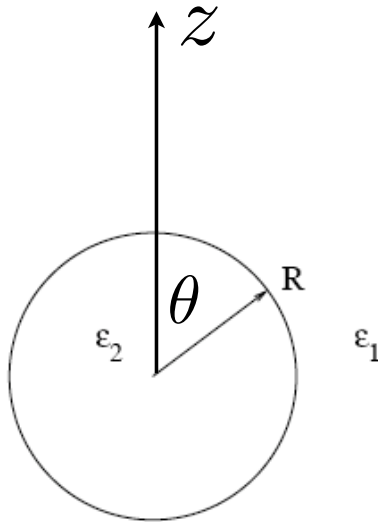
Ansatz: es gibt nur $l = 1$ (kann auch hergeleitet werden)

$$\phi(r, \theta) = A_{10}^< \cdot r \cdot Y_{10}(\theta) \quad \text{für} \quad r < R$$

$$\phi(r, \theta) = (A_{10}^> \cdot r + B_{10}^> \cdot r^{-2}) Y_{10}(\theta) \quad \text{für} \quad r > R$$

$$Y_{10}(\theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

Lösung



$$\phi(r \gg R) = -E_1 z = -E_1 r \cos \theta$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R+0} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R-0}$$

$$\phi \Big|_{r=R+0} = \phi \Big|_{r=R-0}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Big|_{r=R+0} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Big|_{r=R-0}$$

$$\phi(r, \theta) = A_{10}^{<} \cdot r \cdot Y_{10}(\theta) \quad \text{für } r < R$$

$$\phi(r, \theta) = (A_{10}^{>} \cdot r + B_{10}^{>} \cdot r^{-2}) Y_{10}(\theta) \quad \text{für } r > R$$

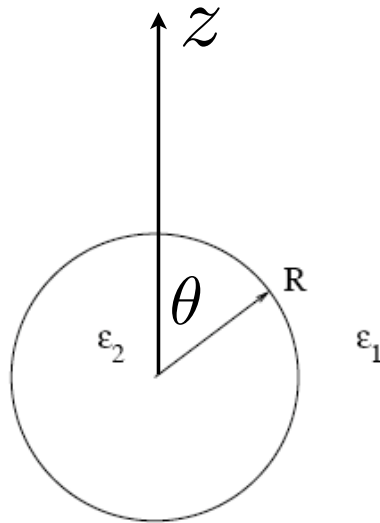
$$Y_{10}(\theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$\phi(r, \theta) = A \cdot r \cdot \cos \theta \quad \text{für } r < R$$

$$\phi(r, \theta) = (B \cdot r + C \cdot r^{-2}) \cos \theta \quad \text{für } r > R$$

$$B = -E_1$$

Lösung



$$\phi(r, \theta) = A \cdot r \cdot \cos \theta \quad \text{für} \quad r < R$$

$$\phi(r, \theta) = (B \cdot r + C \cdot r^{-2}) \cos \theta \quad \text{für} \quad r > R$$

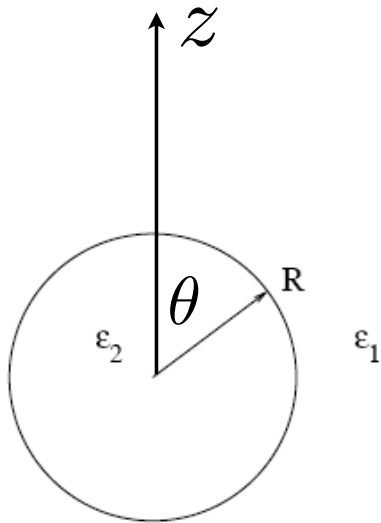
$$B = -E_1$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R+0} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R-0} \quad \longrightarrow \quad \epsilon_2 A = \epsilon_1 (B - 2C \cdot R^{-3})$$

$$\phi \Big|_{r=R+0} = \phi \Big|_{r=R-0} \quad \longrightarrow \quad AR = BR + C \cdot R^{-2}$$

$$A = \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} B$$

$$C = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} BR^3$$



Lösung

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = E_1 \vec{e}_z$$

$$\phi(\vec{r}) = -\vec{\mathbf{E}}_2 \cdot \vec{r} \quad \text{für } r < R$$

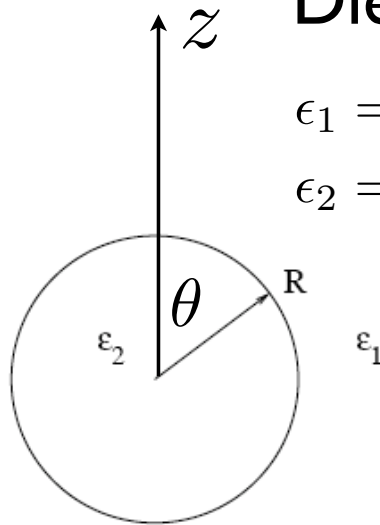
$$\phi(\vec{r}) = -\vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \text{für } r > R$$

$$\vec{\mathbf{E}}_2 = \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \vec{\mathbf{E}}_1$$

$$\vec{\mathbf{p}} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} R^3 \vec{\mathbf{E}}_1$$

Dipol-Moment

Dielektrische Kugel im Vakuum



$$\epsilon_1 = 1$$

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = E_1 \vec{e}_z$$

$$\epsilon_2 = \epsilon$$

$$\phi(\vec{r}) = -\vec{\mathbf{E}}_2 \cdot \vec{r} \quad \text{für} \quad r < R$$

$$\phi(\vec{r}) = -\vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \text{für} \quad r > R$$

$$\vec{\mathbf{E}}_2 = \frac{3}{2 + \epsilon} \vec{\mathbf{E}}_1$$

$$\vec{p} = \frac{\epsilon - 1}{2 + \epsilon} R^3 \vec{\mathbf{E}}_1$$

Dipol-Moment

Im Innen der Kugel gilt

$$\vec{\mathbf{P}} = \frac{\vec{\mathbf{D}} - \vec{\mathbf{E}}}{4\pi} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{\mathbf{E}} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{\mathbf{E}}_2 = \left(\frac{3}{4\pi} \right) \frac{\epsilon - 1}{2 + \epsilon} \vec{\mathbf{E}}_1 = \frac{3}{4\pi R^3} \vec{p} = \frac{\vec{p}}{V}$$

$$\vec{p} = V \vec{\mathbf{P}}$$

Nichtlokale dielektrische Permeabilität

Für schwache Felder und **homogene** Materie gilt

$$\vec{\mathbf{P}}(\vec{r}, t) = \int d^3r_a dt_a \chi_e(\vec{r} - \vec{r}_a, t - t_a) \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}_a, t_a)$$

$\chi_e(\vec{r} - \vec{r}_a, t - t_a)$ - elektrische Suszeptibilität

$$\vec{\mathbf{P}}(\vec{k}, \omega) = \chi_e(\vec{k}, \omega) \vec{\mathbf{E}}(\vec{k}, \omega)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) &\equiv \vec{\mathbf{E}}(\vec{k}, \omega) + 4\pi \vec{\mathbf{P}}(\vec{k}, \omega) \\ &= (1 + 4\pi \chi_e(\vec{k}, \omega)) \vec{\mathbf{E}} \\ &= \epsilon(\vec{k}, \omega) \vec{\mathbf{E}}(\vec{k}, \omega) \end{aligned}$$

$$\epsilon(\vec{k}, \omega) = 1 + 4\pi \chi_e(\vec{k}, \omega)$$

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Elektromagnetische Wellen in der Materie

Nichtlokale dielektrische Permeabilität

Für schwache Felder und **homogene** Materie gilt

$$\vec{\mathbf{P}}(\vec{r}, t) = \int d^3r_a dt_a \chi_e(\vec{r} - \vec{r}_a, t - t_a) \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}_a, t_a)$$

$\chi_e(\vec{r} - \vec{r}_a, t - t_a)$ - elektrische Suszeptibilität

$$\vec{\mathbf{P}}(\vec{k}, \omega) = \chi_e(\vec{k}, \omega) \vec{\mathbf{E}}(\vec{k}, \omega)$$

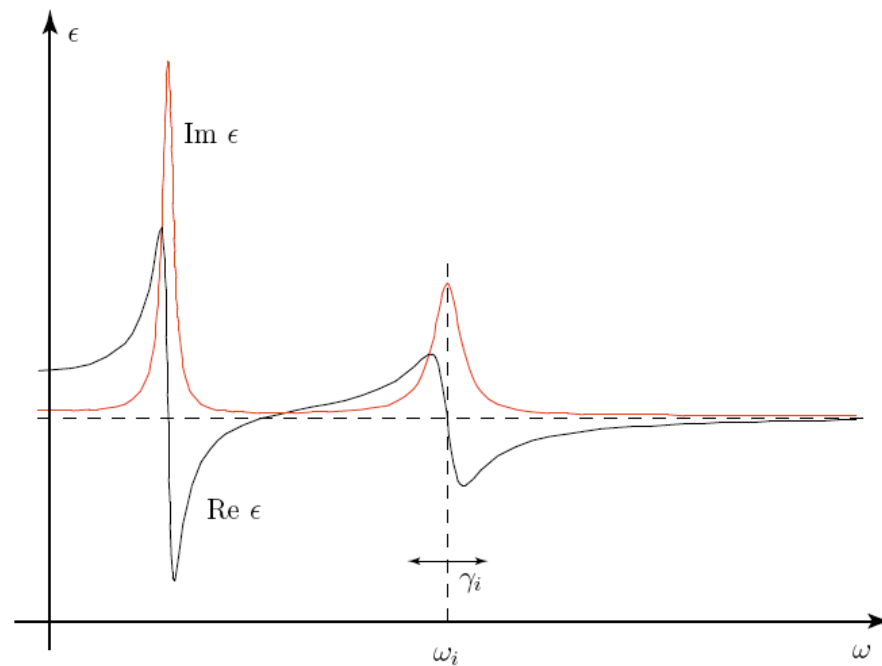
$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) &\equiv \vec{\mathbf{E}}(\vec{k}, \omega) + 4\pi \vec{\mathbf{P}}(\vec{k}, \omega) \\ &= (1 + 4\pi \chi_e(\vec{k}, \omega)) \vec{\mathbf{E}} \\ &= \epsilon(\vec{k}, \omega) \vec{\mathbf{E}}(\vec{k}, \omega) \end{aligned}$$

$$\epsilon(\vec{k}, \omega) = 1 + 4\pi \chi_e(\vec{k}, \omega)$$

Lorentz-Modell der elektrischen Polarisierung

Viele Arten der Oscillatoren

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi \sum_i \chi_e^{(i)}(\omega) = 1 + \sum_i \frac{4\pi n_i e_i^2}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i)}$$



Clausius–Mossotti (Lorentz-Lorenz) Relation.

$$\vec{\mathbf{P}} = \chi_e \vec{\mathbf{E}} = \chi_e^{(0)} \vec{\mathbf{E}}_{\text{eff}}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{eff}} = \vec{\mathbf{E}} + \frac{4\pi}{3} \vec{\mathbf{P}}$$

$$\chi_e = \frac{\chi^{(0)}}{1 - \frac{4\pi}{3} \chi^{(0)}}$$

z.B. in Lorentz-Modell

$$\chi_e^{(0)} = \sum_i \frac{n_i e_i^2}{m_i (\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i)}$$

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e = 1 + \frac{4\pi\chi_e^{(0)}}{1 - \frac{4\pi}{3}\chi_e^{(0)}} = \frac{1 + \frac{8\pi}{3}\chi_e^{(0)}}{1 - \frac{4\pi}{3}\chi_e^{(0)}}$$

Makroskopische Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = 4\pi \langle \rho_{\text{frei}} \rangle = 4\pi \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{\text{frei}} \rangle = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{Äquivalent} \quad \vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

Fourier Transformation

$$i\vec{k} \cdot \vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) = 4\pi \rho(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = i\vec{k} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$i\vec{k} \times \vec{\mathbf{H}}(\vec{k}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -i\vec{k} \phi + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}}$$

Makroskopische Maxwell-Gleichungen (Fourier)

$$i\vec{k} \cdot \vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) = 4\pi\rho(\vec{k}, \omega)$$

$$i\vec{k} \times \vec{\mathbf{H}}(\vec{k}, \omega) + \frac{i\omega}{c}\vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{k}, \omega) = i\vec{k} \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{k}, \omega) = -i\vec{k} \phi(\vec{k}, \omega) + \frac{i\omega}{c}\vec{\mathbf{A}}(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\vec{k}, \omega)\vec{\mathbf{E}}(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{k}, \omega) = \mu(\vec{k}, \omega)\vec{\mathbf{H}}(\vec{k}, \omega)$$

Makroskopische Maxwell-Gleichungen ohne freien Ladungen

$$i\vec{k} \cdot \vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) = 0$$

$$\rho(\vec{k}, \omega) = 0$$

$$i\vec{k} \times \vec{\mathbf{H}}(\vec{k}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) = 0$$

$$\vec{j}(\vec{k}, \omega) = 0$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{k}, \omega) = i\vec{k} \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{k}, \omega) = -i\vec{k} \phi(\vec{k}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}}(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\vec{k}, \omega) \vec{\mathbf{E}}(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{k}, \omega) = \mu(\vec{k}, \omega) \vec{\mathbf{H}}(\vec{k}, \omega)$$

$$i\vec{k} \cdot \vec{\mathbf{D}} = 0 \quad \rightarrow \quad i\epsilon \vec{k} \cdot \left(-i\vec{k} \phi + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}} \right) = 0$$

$$i\vec{k} \times \vec{\mathbf{H}} + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{D}} = 0 \quad \rightarrow \quad i\mu^{-1} \vec{k} \times (i\vec{k} \times \vec{\mathbf{A}}) + \frac{i\omega \epsilon}{c} \left(-i\vec{k} \phi + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}} \right) = 0$$

Wellengleichung in der Materie

$$i\epsilon \vec{k} \cdot \left(-i\vec{k} \phi + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}} \right) = 0$$

$$i\mu^{-1} \vec{k} \times (i\vec{k} \times \vec{\mathbf{A}}) + \frac{i\omega \epsilon}{c} \left(-i\vec{k} \phi + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}} \right) = 0$$

$$\vec{\mathbf{B}} = i\vec{k} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -i\vec{k} \phi + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}}$$

Coulomb Eichung $\vec{k} \cdot \vec{\mathbf{A}} = 0 \quad \rightarrow \quad \phi = 0$

Hier nehmen wir an,
dass $\epsilon \neq 0$

$$|\vec{k}|^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} \vec{\mathbf{A}} = 0$$

Genau wie die Wellengleichung im
Vakuum aber mit

$$c \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

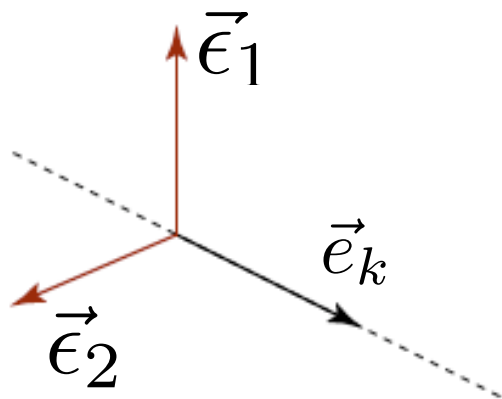
Ebene Wellen - Querwellen

Coulomb Eichung $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0 \rightarrow \phi = 0$ Hier nehmen wir an, dass $\epsilon \neq 0$

$$|\vec{k}|^2 \vec{A} - \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} \vec{A} = 0$$

Genau wie die Wellengleichung im Vakuum aber mit

$$c \rightarrow c' \equiv \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

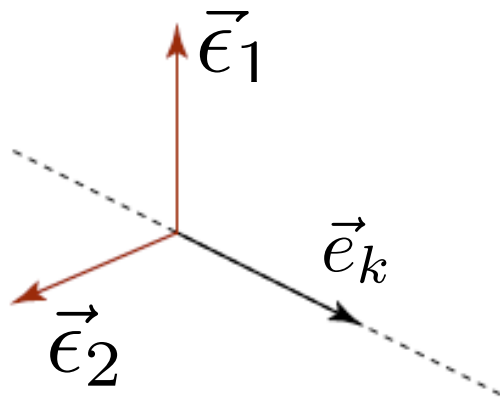


$$\vec{A}(\vec{r}, t) = (a_1 \vec{\epsilon}_1 + a_2 \vec{\epsilon}_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{k} = k \vec{e}_k$$

$$k = \frac{\omega}{c'} = \sqrt{\epsilon \mu} \frac{\omega}{c}$$

Ebene Wellen - Querwellen



$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = (a_1 \vec{\epsilon}_1 + a_2 \vec{\epsilon}_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{k} = k \vec{e}_k$$

$$k = \frac{\omega}{c'} = \sqrt{\epsilon \mu} \frac{\omega}{c} = (n + i\kappa) \frac{\omega}{c}$$

Üblicherweise $\mu \approx 1$ und es gilt

$n(\omega) = \text{Re} \sqrt{\epsilon(\omega)}$ - Brechungsindex

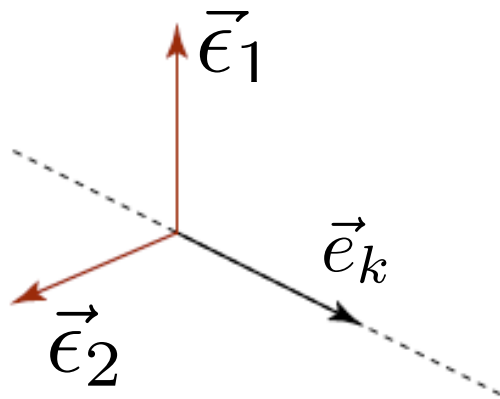
$\kappa(\omega) = \text{Im} \sqrt{\epsilon(\omega)}$ - Absorptionskoeffizient

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{A}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{\mathbf{A}}_0 e^{i\left(\frac{n\omega}{c} \vec{e}_k \cdot \vec{r} - \omega t\right)} e^{-\frac{\kappa\omega}{c} \vec{e}_k \cdot \vec{r}}$$

Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi c}{n\omega}$

Eindringtiefe: $d = \frac{c}{\kappa\omega}$

Brechung



$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = (a_1 \vec{\epsilon}_1 + a_2 \vec{\epsilon}_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{k} = k \vec{e}_k$$

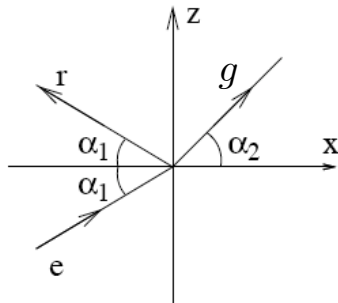
Wir vernachlässigen die Absorption

$$k = \sqrt{\epsilon \mu} \frac{\omega}{c} \approx n \frac{\omega}{c}$$

Hier nehmen wir an,
dass $\text{Im } \epsilon = 0$ und $\mu = 1$

$$\text{Wellenlänge: } \lambda = \frac{2\pi c}{n\omega}$$

$$n_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \quad n_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$$



e - Einfallende Welle

r - Reflektierte Welle

g - Gebrochene Welle

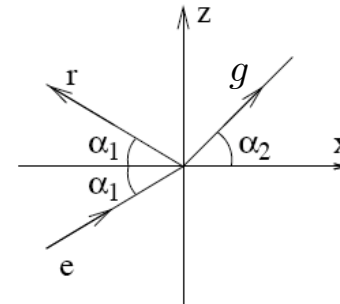
Brechung, Randbedingungen

$$\vec{k} = k \vec{e}_k \quad \text{Wellenlänge: } \lambda = \frac{2\pi c}{n\omega} \quad n_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \quad n_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$$

$$\vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{A}$$

$$k = n \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = i\vec{k} \times \vec{A}$$



$$\vec{A}_e(\vec{r}, t) = \vec{A}_e e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega_e t)} \quad \text{e - Einfallende Welle}$$

$$\vec{A}_r(\vec{r}, t) = \vec{A}_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)} \quad \text{r - Reflektierte Welle}$$

$$\vec{A}_g(\vec{r}, t) = \vec{A}_g e^{i(\vec{k}_g \cdot \vec{r} - \omega_g t)} \quad \text{g - Gebrochene Welle}$$

$$\vec{E}_{\parallel}(x = -0) = \vec{E}_{\parallel}(x = +0)$$

$$\epsilon_1 \vec{E}_{\perp}(x = -0) = \epsilon_2 \vec{E}_{\perp}(x = +0)$$

$$\vec{H}_{\parallel}(x = -0) = \vec{H}_{\parallel}(x = +0)$$

$$\mu_1 \vec{H}_{\perp}(x = -0) = \mu_2 \vec{H}_{\perp}(x = +0)$$

Brechung, Snellius-Gesetz

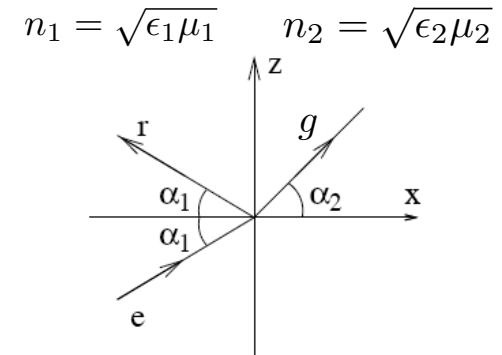
$$\vec{\mathbf{A}}_e(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{A}}_e e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega_e t)}$$

$$\vec{\mathbf{A}}_r(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{A}}_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)}$$

$$\vec{\mathbf{A}}_g(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{A}}_g e^{i(\vec{k}_g \cdot \vec{r} - \omega_g t)}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}} = i\vec{k} \times \vec{\mathbf{A}}$$



$$\vec{\mathbf{A}}_e(x = -0, y, z, t) = \vec{\mathbf{A}}_e e^{i(k_{e,y}y + k_{e,z}z - \omega_e t)}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_e(x = -0) \sim \vec{\mathbf{H}}_e(x = -0) \sim e^{i(k_{e,y}y + k_{e,z}z - \omega_e t)}$$

$$\vec{\mathbf{A}}_r(x = -0, y, z, t) = \vec{\mathbf{A}}_r e^{i(k_{r,y}y + k_{r,z}z - \omega_r t)}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_r(x = -0) \sim \vec{\mathbf{H}}_r(x = -0) \sim e^{i(k_{r,y}y + k_{r,z}z - \omega_r t)}$$

$$\vec{\mathbf{A}}_g(x = +0, y, z, t) = \vec{\mathbf{A}}_g e^{i(k_{g,y}y + k_{g,z}z - \omega_g t)}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_g(x = +0) \sim \vec{\mathbf{H}}_g(x = +0) \sim e^{i(k_{g,y}y + k_{g,z}z - \omega_g t)}$$

$$\omega_e = \omega_r = \omega_g = \omega$$

$$k_{e,y} = k_{r,y} = k_{g,y} = k_y$$

$$k_{e,z} = k_{r,z} = k_{g,z} = k_z$$

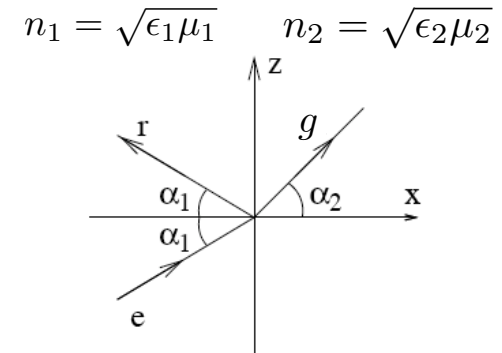
Brechung, Snellius-Gesetz

$$\vec{\mathbf{A}}_e(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{A}}_e e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega_e t)}$$

$$\vec{\mathbf{A}}_r(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{A}}_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)}$$

$$\vec{\mathbf{A}}_g(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{A}}_g e^{i(\vec{k}_g \cdot \vec{r} - \omega_g t)}$$

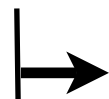
$$k = n \frac{\omega}{c}$$



$$\omega_e = \omega_r = \omega_g = \omega$$

$$k_{e,y} = k_{r,y} = k_{g,y} = k_y$$

$$k_{e,z} = k_{r,z} = k_{g,z} = k_z$$

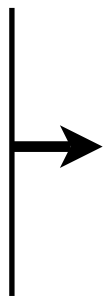


$\vec{k}_e$, $\vec{k}_r$, und $\vec{k}_g$ liegen in einer Ebene
wir wählen $k_y = 0$

$$k_{e,z} = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_e$$

$$k_{r,z} = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_r$$

$$k_{g,z} = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_g$$



$$\alpha_e = \alpha_r \equiv \alpha_1$$

$$\alpha_g \equiv \alpha_2$$

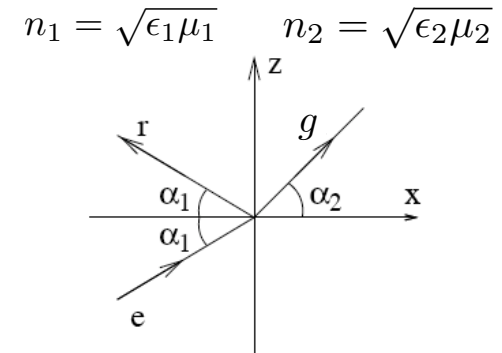
$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

Snellius-Gesetz

Brechung, Snellius-Gesetz

$\vec{k}_e$, $\vec{k}_r$, und $\vec{k}_g$ liegen in einer Ebene
wir wählen $k_y=0$

$$k = n \frac{\omega}{c}$$



$$k_{e,y} = k_{r,y} = k_{g,y} = 0$$

$$k_{e,z} = k_{r,z} = k_{g,z} = k_z$$

$$k_z = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_1 = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_2$$

$$\alpha_e = \alpha_r \equiv \alpha_1 \quad \alpha_g \equiv \alpha_2$$

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

$$k_{e,x} = -k_{r,x} = n_1 \frac{\omega}{c} \cos \alpha_1$$

$$k_{g,x} = n_2 \frac{\omega}{c} \cos \alpha_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} = n_2 \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_1}$$

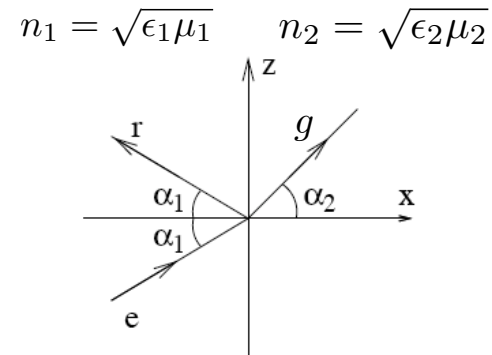
für $\frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_1 > 1$ ist $k_{g,x}$ imaginär: volle reflektion

Brechung, zwei Polarisationen

$$\vec{A}_e(\vec{r}, t) = \vec{A}_e e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{A}_r(\vec{r}, t) = \vec{A}_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{A}_g(\vec{r}, t) = \vec{A}_g e^{i(\vec{k}_g \cdot \vec{r} - \omega t)}$$



$$\vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{A}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = i\vec{k} \times \vec{A}$$

Polarisation 1 $\vec{E} \parallel \vec{A} \sim \vec{e}_y$, $\vec{H} \in (\vec{e}_x, \vec{e}_z)$

Polarisation 2 $\vec{H} \sim \vec{e}_y$, $\vec{E} \parallel \vec{A} \in (\vec{e}_x, \vec{e}_z)$

Polarisation I $\vec{\mathbf{E}} \parallel \vec{\mathbf{A}} \sim \vec{e}_y$, $\vec{\mathbf{H}} \in (\vec{e}_x, \vec{e}_z)$

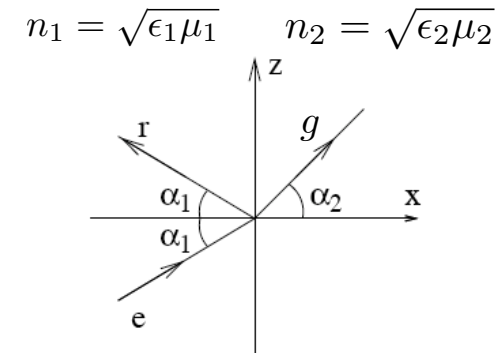
$$\vec{\mathbf{A}}_e(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{A}}_e e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{\mathbf{A}}_r(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{A}}_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{\mathbf{A}}_g(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{A}}_g e^{i(\vec{k}_g \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}}$$

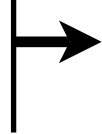
$$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}} = i\vec{k} \times \vec{\mathbf{A}}$$



$$E_y(x = -0) = E_y(x = +0)$$

$$\mu_1 H_x(x = -0) = \mu_2 H_x(x = +0)$$

$$\mu H_x = -ik_z A_y$$

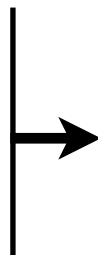


$$A_{e,y} + A_{r,y} = A_{g,y}$$

$$\epsilon_1 \vec{\mathbf{E}}_{\perp}(x = -0) = \epsilon_2 \vec{\mathbf{E}}_{\perp}(x = +0) = 0$$

$$H_z(x = -0) = H_z(x = +0)$$

$$\mu H_z = ik_x A_y$$



$$\mu_1^{-1} k_{e,x} A_{e,y} + \mu_1^{-1} k_{r,x} A_{r,y} = \mu_2^{-1} k_{g,x} A_{g,y}$$

$$\mu_1^{-1} n_1 \cos \alpha_1 (A_{e,y} - A_{r,y}) = \mu_2^{-1} n_2 \cos \alpha_2 A_{g,y}$$

Polarisation I $\vec{E} \parallel \vec{A} \sim \vec{e}_y$, $\vec{H} \in (\vec{e}_x, \vec{e}_z)$

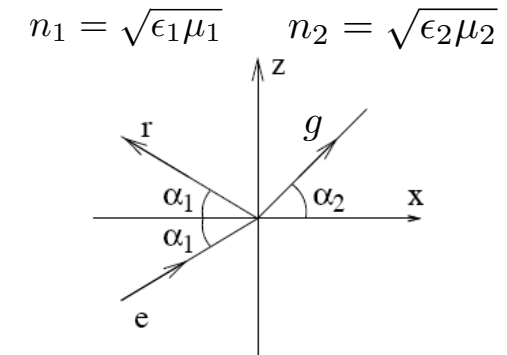
$$\vec{A}_e(\vec{r}, t) = \vec{A}_e e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{A}_r(\vec{r}, t) = \vec{A}_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{A}_g(\vec{r}, t) = \vec{A}_g e^{i(\vec{k}_g \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{A}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = i\vec{k} \times \vec{A}$$



$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

$$A_{e,y} + A_{r,y} = A_{g,y}$$

$$\frac{n_1}{\mu_1} \cos \alpha_1 (A_{e,y} - A_{r,y}) = \frac{n_2}{\mu_2} \cos \alpha_2 A_{g,y}$$

$$A_{g,y} = \frac{2n_1 \cos \alpha_1}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} A_{e,y}$$

$$A_{r,y} = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} A_{e,y} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 + \alpha_1)} A_{e,y}$$

Hier nehmen wir an,
dass $\mu_1 = \mu_2 = 1$

Polarisation I $\vec{\mathbf{E}} \parallel \vec{\mathbf{A}} \sim \vec{e}_y$, $\vec{\mathbf{H}} \in (\vec{e}_x, \vec{e}_z)$

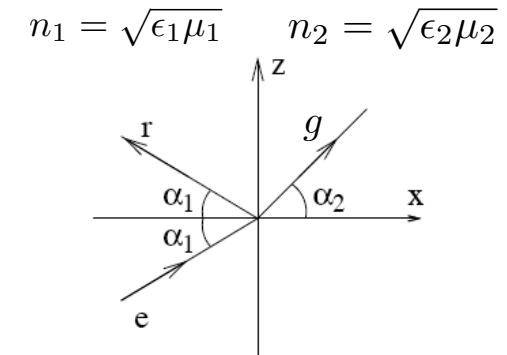
$$\vec{\mathbf{S}} \equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}})$$

Poynting-Vektor

$$|\vec{\mathbf{S}}| \propto n |A_y|^2$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}} = i\vec{k} \times \vec{\mathbf{A}}$$



$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

$$A_{g,y} = \frac{2n_1 \cos \alpha_1}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} A_{e,y}$$

$$A_{r,y} = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} A_{e,y} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 + \alpha_1)} A_{e,y}$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 1$$

Reflektion

$$R = \frac{|\vec{\mathbf{S}}_r|}{|\vec{\mathbf{S}}_e|} = \frac{|A_{r,y}|^2}{|A_{e,y}|^2} = \frac{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

Polarisation 2 $\vec{H} \sim \vec{e}_y$, $\vec{E} \parallel \vec{A} \in (\vec{e}_x, \vec{e}_z)$

$$\vec{H}_e(\vec{r}, t) = \vec{H}_e e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

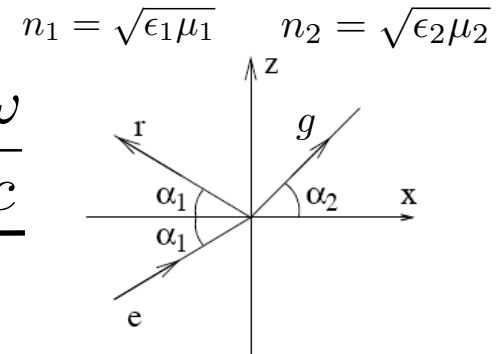
$$\vec{H}_r(\vec{r}, t) = \vec{H}_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{H}_g(\vec{r}, t) = \vec{H}_g e^{i(\vec{k}_g \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = i \vec{k} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{A} \quad k = n \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{E} = -\frac{\mu}{n} \vec{e}_k \times \vec{H}$$



$$H_y(x = -0) = H_y(x = +0) \quad \Big| \rightarrow \quad H_{e,y} + H_{r,y} = H_{g,y}$$

$$E_z(x = -0) = E_z(x = +0) \quad \Big| \rightarrow \quad \frac{\mu_1}{n_1^2} (k_{e,x} H_{e,y} + k_{r,x} H_{r,y}) = \frac{\mu_2}{n_2^2} k_{g,x} H_{g,y}$$

$$E_z = -\frac{\mu}{n} \frac{k_x}{k} H_y \quad \Big| \rightarrow \quad \frac{\mu_1}{n_1} \cos \alpha_1 (H_{e,y} - H_{r,y}) = \frac{\mu_2}{n_2} \cos \alpha_2 H_{g,y}$$

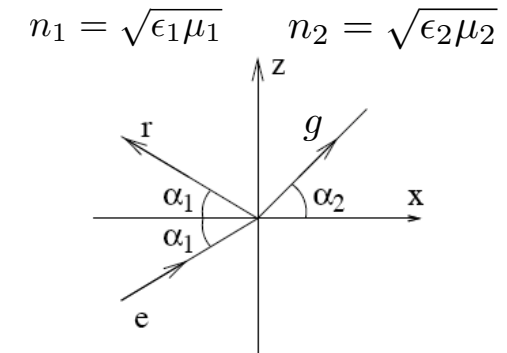
Polarisation 2 $\vec{\mathbf{H}} \sim \vec{e}_y$, $\vec{\mathbf{E}} \parallel \vec{\mathbf{A}} \in (\vec{e}_x, \vec{e}_z)$

$$\vec{\mathbf{H}}_e(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{H}}_e e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{\mathbf{H}}_r(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{H}}_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{\mathbf{H}}_g(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{H}}_g e^{i(\vec{k}_g \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\mu}{n} \vec{e}_k \times \vec{\mathbf{H}}$$



$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

$$H_{e,y} + H_{r,y} = H_{g,y}$$

$$\frac{\mu_1}{n_1} \cos \alpha_1 (H_{e,y} - H_{r,y}) = \frac{\mu_2}{n_2} \cos \alpha_2 H_{g,y}$$

Hier nehmen wir an,
dass $\mu_1 = \mu_2 = 1$

$$H_{g,y} = \frac{2n_2 \cos \alpha_1}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} H_{e,y}$$

$$H_{r,y} = \frac{n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} H_{e,y} = \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)} H_{e,y}$$

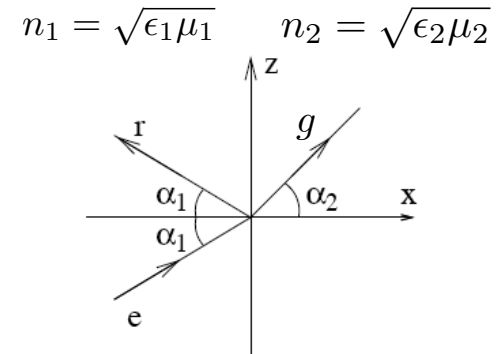
Polarisation 2 $\vec{H} \sim \vec{e}_y$, $\vec{E} \parallel \vec{A} \in (\vec{e}_x, \vec{e}_z)$

$$\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H})$$

Poynting-Vektor

$$|\vec{S}| \propto \frac{|H_y|^2}{n}$$

$$\vec{E} = -\frac{\mu}{n} \vec{e}_k \times \vec{H}$$



$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

$$H_{g,y} = \frac{2n_2 \cos \alpha_1}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} H_{e,y}$$

$$H_{r,y} = \frac{n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} H_{e,y} = \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)} H_{e,y}$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 1$$

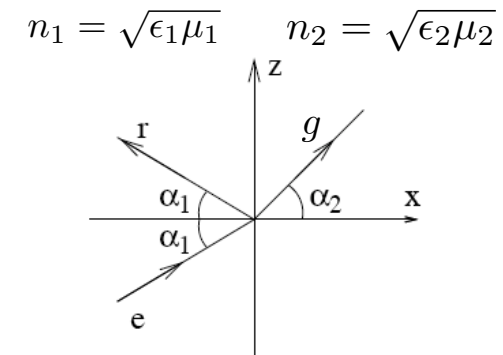
Reflektion

$$R = \frac{|\vec{S}_r|}{|\vec{S}_e|} = \frac{|H_{r,y}|^2}{|H_{e,y}|^2} = \frac{\tan^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan^2(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Brewster-Winkel

Polarisation 1 $\vec{E} \parallel \vec{A} \sim \vec{e}_y$, $\vec{H} \in (\vec{e}_x, \vec{e}_z)$

Polarisation 2 $\vec{H} \sim \vec{e}_y$, $\vec{E} \parallel \vec{A} \in (\vec{e}_x, \vec{e}_z)$



Polarisation 1
$$R = \frac{|\vec{S}_r|}{|\vec{S}_e|} = \frac{|A_{r,y}|^2}{|A_{e,y}|^2} = \frac{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

Polarisation 2
$$R = \frac{|\vec{S}_r|}{|\vec{S}_e|} = \frac{|H_{r,y}|^2}{|H_{e,y}|^2} = \frac{\tan^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan^2(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Für $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$ - keine Reflektion der Polarisation 2!
Das reflektierte Licht ist linear Polarisiert!

$$\cos \alpha_1 = \sin \alpha_2 = (n_1/n_2) \sin \alpha_1 \qquad n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

$$\tan \alpha_1 = (n_2/n_1) \quad \text{Brewster-Winkel}$$

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Brechung und Absorption

Wellengleichung und Querwellen

Coulomb Eichung $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$

$$(\vec{k})^2 \vec{A} - \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} \vec{A} = 0 \quad \text{ab hier } \mu = 1$$

$$\sqrt{\epsilon} = (n + i\kappa) \quad \begin{array}{l} n(\omega) = \text{Re} \sqrt{\epsilon(\omega)} - \text{Brechungsindex} \\ \kappa(\omega) = \text{Im} \sqrt{\epsilon(\omega)} - \text{Absorptionskoeffizient} \end{array}$$

Beispiel

$$\vec{k} = k \vec{e}_k \quad k = \sqrt{\epsilon} \frac{\omega}{c} = (n + i\kappa) \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{A}_0 e^{i\left(\frac{n\omega}{c} \vec{e}_k \cdot \vec{r} - \omega t\right)} e^{-\frac{\kappa\omega}{c} \vec{e}_k \cdot \vec{r}}$$

Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi c}{n\omega}$

Eindringtiefe: $d = \frac{c}{\kappa\omega}$

Querwellen: allgemeiner Fall

$$(\vec{k})^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} \vec{\mathbf{A}} = 0$$

$$\sqrt{\epsilon} = (n + i\kappa)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{\mathbf{A}} = 0$$

Coulomb Eichung

Allgemeine Lösung

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{A}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{k} = k' \vec{e}_1 + ik'' \vec{e}_2$$

$$\vec{\mathbf{A}}_0 = A' \vec{e}_1 + iA'' \vec{e}_2$$

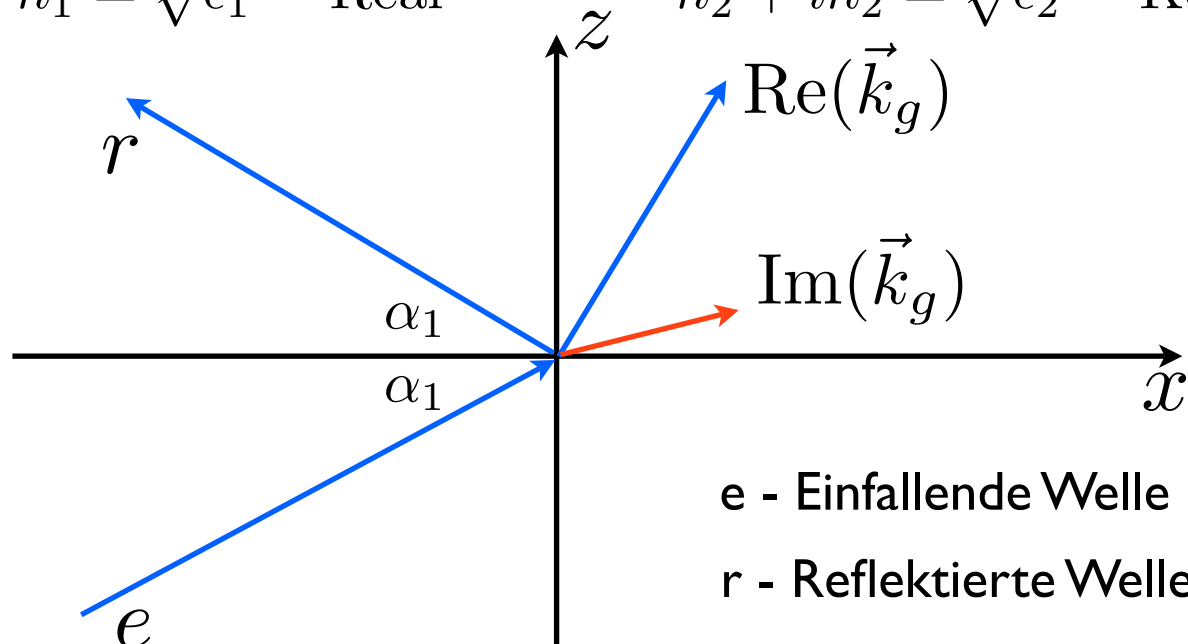
$$\vec{k} \cdot \vec{\mathbf{A}}_0 = 0$$

$$(\vec{k})^2 = k'^2 - k''^2 + 2ik'k''(\vec{e}_1 \vec{e}_2) = (n + i\kappa)^2 \frac{\omega^2}{c^2}$$

Konkreter Beispiel

$n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$ - Real

$n_2 + i\kappa_2 = \sqrt{\epsilon_2}$ - Komplex



e - Einfallende Welle
 r - Reflektierte Welle
 g - Gebrochene Welle

$$\vec{\mathbf{A}}_e(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{A}}_e e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

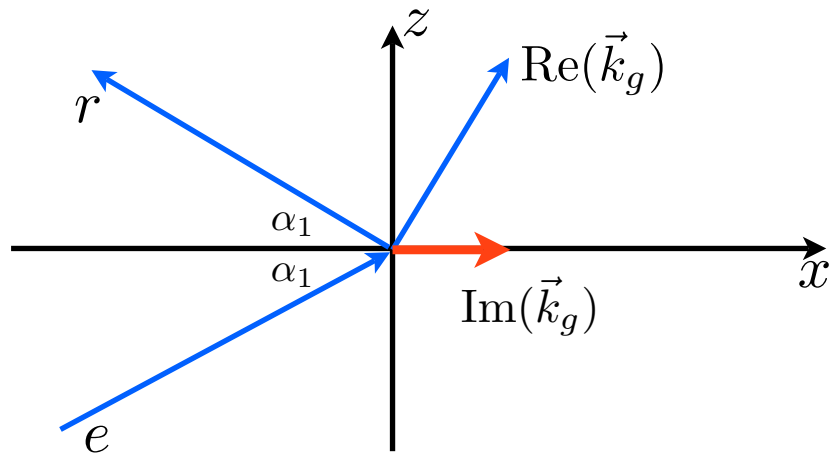
$$\vec{\mathbf{A}}_r(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{A}}_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{\mathbf{A}}_g(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{A}}_g e^{i(\vec{k}_g \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Was kommt statt Snellius-Gesetz?

$$n_1 = \sqrt{\epsilon_1} \quad - \text{Real}$$

$$n_2 + i\kappa_2 = \sqrt{\epsilon_2} \quad - \text{Komplex}$$



$$k_{e,y} = k_{r,y} = k_{g,y} = k_y$$

$$k_{e,z} = k_{r,z} = k_{g,z} = k_z$$

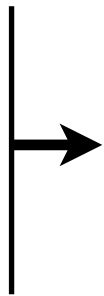
$\vec{k}_e$, $\vec{k}_r$, und $\vec{k}_g$ liegen in einer Ebene
wir wählen $k_y=0$

$k_{g,z}$ - Real !

$$k_{e,z} = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_e$$

$$k_{r,z} = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_r$$

$$k_{g,z} = ?$$



$$\alpha_e = \alpha_r \equiv \alpha_1$$

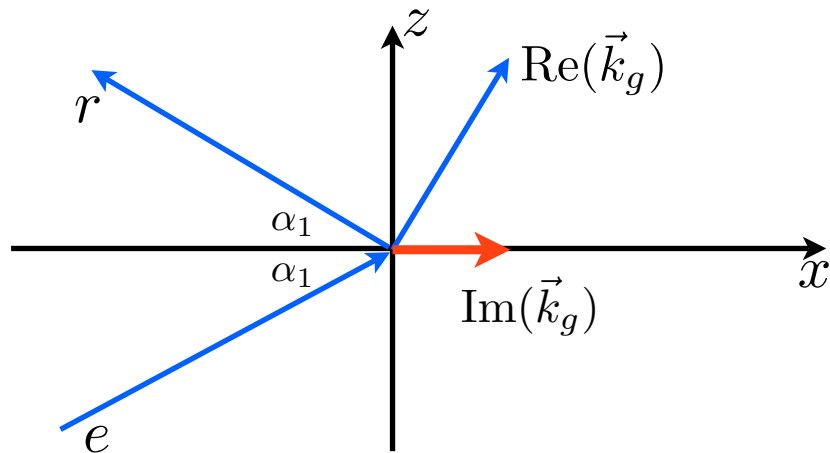
$$k_{g,z} = k_z = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \alpha_1$$

$$k_{g,x} = \sqrt{(\vec{k}_g)^2 - k_{g,z}^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1}$$

Randbedingungen

$$n_1 = \sqrt{\epsilon_1} \quad - \text{Real}$$

$$n_2 + i\kappa_2 = \sqrt{\epsilon_2} \quad - \text{Komplex}$$



$$\alpha_e = \alpha_r \equiv \alpha_1$$

$$k_{g,z} = k_z = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \alpha_1$$

$$k_{g,x} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1}$$

Polarisation I $\vec{\mathbf{A}} \sim \vec{\mathbf{e}}_y$ $\vec{\mathbf{E}} = \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}}$ $\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}} = i\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{A}}$

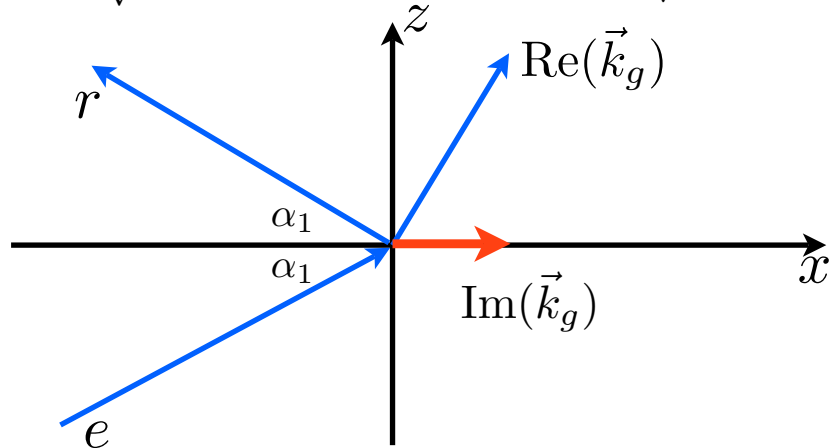
$$E_y(x = -0) = E_y(x = +0) \quad \rightarrow \quad A_{e,y} + A_{r,y} = A_{g,y}$$

$$H_z(x = -0) = H_z(x = +0) \quad \rightarrow \quad k_{e,x} A_{e,y} + k_{r,x} A_{r,y} = k_{g,x} A_{g,y}$$

Amplituden

$n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$ - Real

$n_2 + i\kappa_2 = \sqrt{\epsilon_2}$ - Komplex



$$\alpha_e = \alpha_r \equiv \alpha_1$$

$$k_{g,z} = k_z = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \alpha_1$$

$$k_{g,x} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1}$$

Polarisation I

$$\vec{\mathbf{A}} \sim \vec{\mathbf{e}}_y$$

$$A_{e,y} + A_{r,y} = A_{g,y}$$

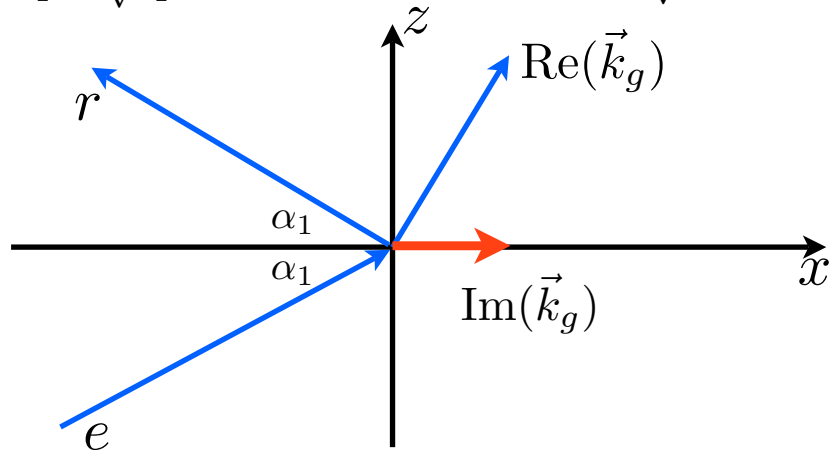
$$k_{e,x} A_{e,y} + k_{r,x} A_{r,y} = k_{g,x} A_{g,y}$$

$$A_{r,y} = \frac{k_{e,x} - k_{g,x}}{k_{e,x} + k_{g,x}} A_{e,y} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \alpha_1 - \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \alpha_1 + \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1}} A_{e,y}$$

$$A_{g,y} = \frac{2k_{e,x}}{k_{e,x} + k_{g,x}} A_{e,y}$$

Reflektion

$n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$ - Real $n_2 + i\kappa_2 = \sqrt{\epsilon_2}$ - Komplex



Polarisation I $\vec{\mathbf{A}} \sim \vec{\mathbf{e}}_y$

$$A_{r,y} = \frac{k_{e,x} - k_{g,x}}{k_{e,x} + k_{g,x}} A_{e,y} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \alpha_1 - \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \alpha_1 + \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1}} A_{e,y}$$

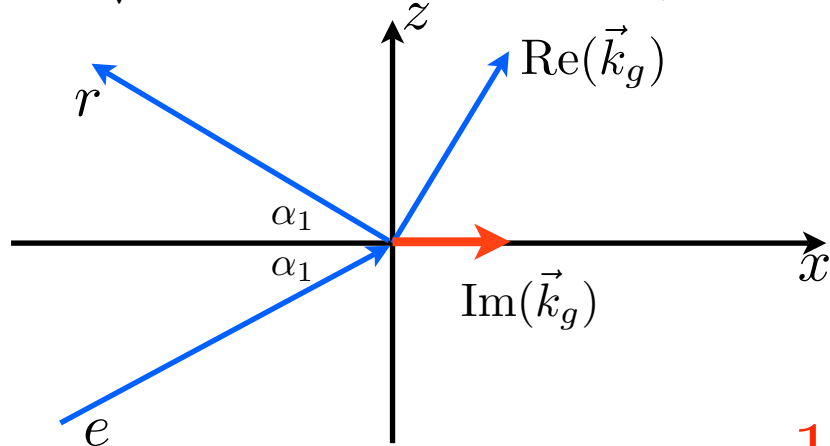
$$R = \frac{|\vec{\mathbf{S}}_r|}{|\vec{\mathbf{S}}_e|} = \frac{|A_{r,y}|^2}{|A_{e,y}|^2} = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \alpha_1 - \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \alpha_1 + \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1}} \right|^2$$

$$R = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \right|^2 = \left| \frac{n_1 - n_2 - i\kappa_2}{n_1 + n_2 + i\kappa_2} \right|^2 \quad \text{für } \alpha_1 = 0$$

Eindringtiefe

$n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$ - Real

$n_2 + i\kappa_2 = \sqrt{\epsilon_2}$ - Komplex



$$k_{g,x} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1}$$

$$d = \frac{1}{\text{Im } k_{g,x}}$$

$$d = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\text{Im} \sqrt{\epsilon_2}} = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\kappa_2}$$

für $\alpha_1 = 0$

$$R = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \right|^2 = \left| \frac{n_1 - n_2 - i\kappa_2}{n_1 + n_2 + i\kappa_2} \right|^2$$

Elektromagnetische Wellen in Metallen

Makroskopische Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = 4\pi \langle \rho_{\text{frei}} \rangle = 4\pi \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{\text{frei}} \rangle = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{Äquivalent} \quad \vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

Fourier Transformation

$$i\vec{k} \cdot \vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) = 4\pi \rho(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = i\vec{k} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$i\vec{k} \times \vec{\mathbf{H}}(\vec{k}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -i\vec{k} \phi + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}}$$

Makroskopische Maxwell-Gleichungen (Fourier)

$$i\vec{k} \cdot \vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) = 4\pi\rho(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\vec{k}, \omega)\vec{\mathbf{E}}(\vec{k}, \omega)$$

$$i\vec{k} \times \vec{\mathbf{H}}(\vec{k}, \omega) + \frac{i\omega}{c}\vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{k}, \omega) = \mu(\vec{k}, \omega)\vec{\mathbf{H}}(\vec{k}, \omega)$$

Leitfähigkeit $\vec{j} = \sigma(\omega)\vec{\mathbf{E}}$

$$i\vec{k} \times \vec{\mathbf{H}}(\vec{k}, \omega) + \frac{i\omega}{c}\vec{\mathbf{D}}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c}\sigma(\omega)\vec{\mathbf{E}}(\vec{k}, \omega)$$

$$i\vec{k} \times \vec{\mathbf{H}}(\vec{k}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \left(\epsilon - \frac{4\pi}{i\omega}\sigma(\omega) \right) \vec{\mathbf{E}}(\vec{k}, \omega) = 0$$

$$\epsilon_{\text{total}} = \epsilon_{\text{geb}} - \frac{4\pi\sigma(\omega)}{i\omega}$$

Lorentz-Modell der elektrischen Polarisierung

Viele Arten der Oscillatoren

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi \sum_i \chi_e^{(i)}(\omega) = 1 + \sum_i \frac{4\pi n_i e_i^2}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i)}$$

Wir betrachten noch eine Art der Oscillatoren die den freien Elektronen entsprechen (P. Drude 1900):

$$\omega_f = 0 \quad , \quad \gamma_f = 1/\tau$$

$$m(\ddot{\vec{r}} + (1/\tau)\dot{\vec{r}}) = e\vec{\mathbf{E}}(t)$$

$$\epsilon_{\text{total}}(\omega) = \epsilon_{\text{geb}}(\omega) + \frac{4\pi n_f e^2}{m(-\omega^2 - i\omega/\tau)}$$

Wir vergleichen zwei Ergebnisse

$$\epsilon_{\text{total}} = \epsilon_{\text{geb}} - \frac{4\pi\sigma(\omega)}{i\omega}$$

$$\epsilon_{\text{total}} = \epsilon_{\text{geb}} + \frac{4\pi n_f e^2}{m(-\omega^2 - i\omega/\tau)}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{n_f e^2}{m} \frac{1}{\frac{1}{\tau} - i\omega}$$

Drude Formel

Grenzfall $\omega\tau \ll 1$

$$\sigma(\omega) = \frac{n_f e^2}{m} \frac{1}{\frac{1}{\tau} - i\omega} \approx \frac{n_f e^2 \tau}{m} \equiv \sigma_D$$

Drude Leitfähigkeit

$$\epsilon_{\text{total}} = \epsilon_{\text{geb}} - \frac{4\pi\sigma_D}{i\omega(1 - i\omega\tau)} \approx \epsilon_{\text{geb}} - \frac{4\pi\sigma_D}{i\omega}$$

$$\epsilon_{\text{geb}} \approx 1$$

$$\omega \ll \sigma_D \quad \epsilon_{\text{total}} \approx -\frac{4\pi\sigma_D}{i\omega} \quad |\epsilon_{\text{total}}| \gg 1$$

ausreichend (aber nicht nötig) $\sigma_D \tau = \frac{n_f e^2 \tau^2}{m} \gg 1$

Kupfer: $1/\tau = 3.7 \cdot 10^{13} \text{s}^{-1}$, $\sigma_D = 5.8 \cdot 10^{17} \text{s}^{-1}$, $\sigma_D \tau \approx 1.5 \cdot 10^4 \gg 1$

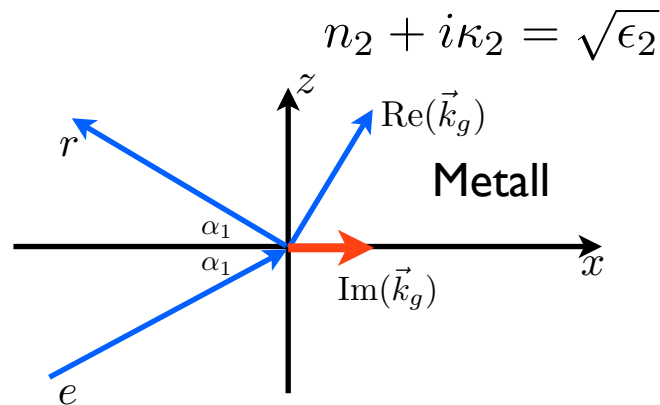
Reflektion auf Metall-Oberfläche

$$\epsilon_{\text{total}} \approx -\frac{4\pi\sigma_D}{i\omega} \quad \omega\tau \ll 1$$

$$\omega \ll \sigma_D \quad |\epsilon_{\text{total}}| \gg 1$$

ausreichend (aber nicht nötig) $\sigma_D\tau = \frac{n_f e^2 \tau^2}{m} \gg 1$

Kupfer: $1/\tau = 3.7 \cdot 10^{13} \text{s}^{-1}$, $\sigma_D = 5.8 \cdot 10^{17} \text{s}^{-1}$, $\sigma_D\tau \approx 1.5 \cdot 10^4 \gg 1$



für $\alpha_1 = 0$

$$d = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\text{Im}\sqrt{\epsilon_2}} = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\kappa_2}$$

$$R = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \right|^2 = \left| \frac{n_1 - n_2 - i\kappa_2}{n_1 + n_2 + i\kappa_2} \right|^2$$

$$\sqrt{\epsilon_{\text{total}}} \approx \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{4\pi\sigma_D}}{\sqrt{\omega}}$$

$$d \approx \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_D\omega}}$$

$$R \approx 1$$

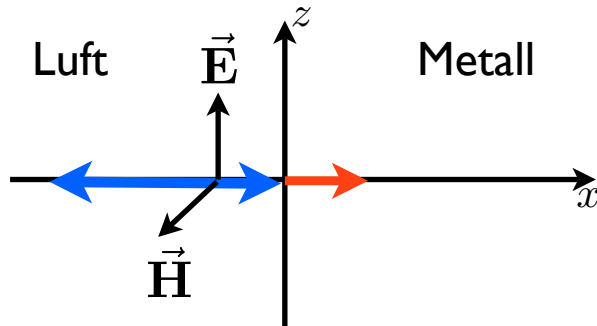
Skin-Effect

$$\epsilon_{\text{total}} \approx -\frac{4\pi\sigma_D}{i\omega} \quad \omega\tau \ll 1$$

$$\omega \ll \sigma_D \quad |\epsilon_{\text{total}}| \gg 1$$

ausreichend (aber nicht nötig) $\sigma_D\tau = \frac{n_f e^2 \tau^2}{m} \gg 1$

Kupfer: $1/\tau = 3.7 \cdot 10^{13} \text{s}^{-1}$, $\sigma_D = 5.8 \cdot 10^{17} \text{s}^{-1}$, $\sigma_D\tau \approx 1.5 \cdot 10^4 \gg 1$



$$d \approx \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_D\omega}}$$

z.B. $\omega = 2\pi \cdot 50 \text{Hz} \approx 314 \text{s}^{-1}$

in der Luft: $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \approx \frac{3 \cdot 10^{10}}{50} = 0.6 \cdot 10^9 \text{cm} = 6000 \text{km}$

im Kupfer: $d \approx \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_D\omega}} \approx 1 \text{cm}$

Grenzfall $\omega\tau \ll 1$

$$\vec{j} = \sigma_D \vec{E} \qquad \epsilon_{\text{total}} \approx \epsilon_{\text{geb}} - \frac{4\pi\sigma_D}{i\omega} \approx -\frac{4\pi\sigma_D}{i\omega}$$

$$i\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \vec{D}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \sigma_D \vec{E}(\vec{k}, \omega)$$

$$i\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \left(\cancel{\epsilon_{\text{geb}}} - \frac{4\pi}{i\omega} \sigma_D \right) \vec{E}(\vec{k}, \omega) = 0$$

$$i\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \sigma_D \vec{E}(\vec{k}, \omega) \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \sigma_D \vec{E}$$

Quasi-stationärer Fall =
Ampère-Gesetz + Ohm-Gesetz

Quasi-stationärer Fall

$$\mu = 1$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \mu^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \sigma_{\text{D}} \vec{\mathbf{E}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}}) = \frac{4\pi}{c} \sigma_{\text{D}} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}$$

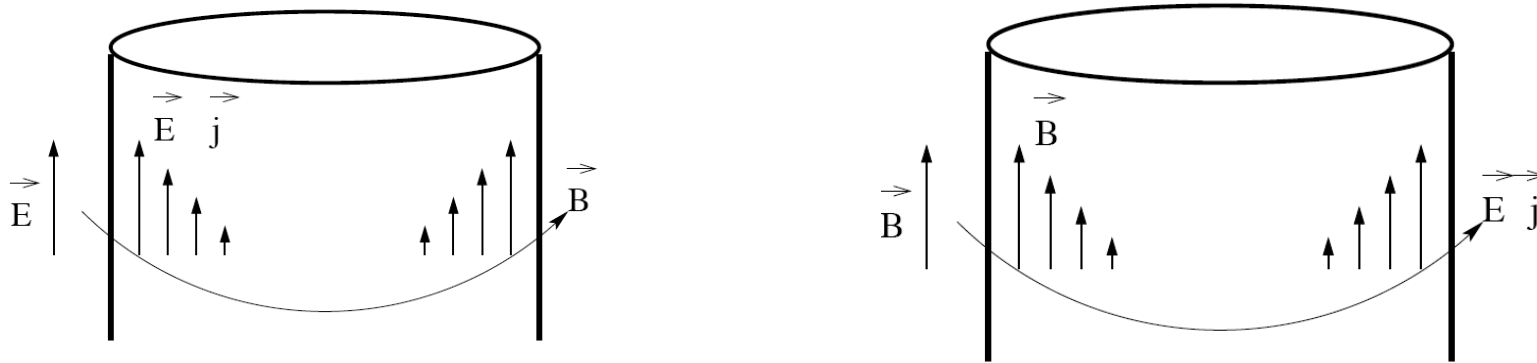
$$\nabla^2 \vec{\mathbf{B}} - \frac{4\pi\sigma_{\text{D}}}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0 \text{ oder } \nabla^2 \vec{\mathbf{B}} + \frac{4\pi i\sigma_{\text{D}}\omega}{c^2} \vec{\mathbf{B}} = 0$$

auch

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} - \frac{4\pi\sigma_{\text{D}}}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = 0 \text{ oder } \nabla^2 \vec{\mathbf{E}} + \frac{4\pi i\sigma_{\text{D}}\omega}{c^2} \vec{\mathbf{E}} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{j} - \frac{4\pi\sigma_{\text{D}}}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0 \text{ oder } \nabla^2 \vec{j} + \frac{4\pi i\sigma_{\text{D}}\omega}{c^2} \vec{j} = 0$$

Skin-Effekt

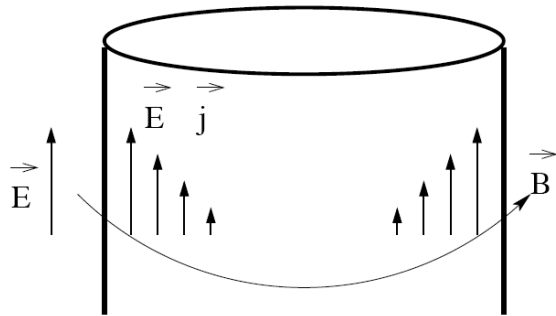


$$\nabla^2 \vec{\mathbf{B}} - \frac{4\pi\sigma_{\text{D}}}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0 \text{ oder } \nabla^2 \vec{\mathbf{B}} + \frac{4\pi i\sigma_{\text{D}}\omega}{c^2} \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} - \frac{4\pi\sigma_{\text{D}}}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = 0 \text{ oder } \nabla^2 \vec{\mathbf{E}} + \frac{4\pi i\sigma_{\text{D}}\omega}{c^2} \vec{\mathbf{E}} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{j} - \frac{4\pi\sigma_{\text{D}}}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0 \text{ oder } \nabla^2 \vec{j} + \frac{4\pi i\sigma_{\text{D}}\omega}{c^2} \vec{j} = 0$$

Widerstand des Drahtes bei Skin-Effect



$$\nabla^2 \vec{E} = -\frac{4\pi i \sigma_D \omega}{c^2} \vec{E}$$

$$\nabla_x^2 E = -\frac{4\pi i \sigma_D \omega}{c^2} E$$

$$E(x) = E e^{-kx} \quad \text{für } r \gg d$$

$$k^2 = -\frac{4\pi i \sigma_D \omega}{c^2} \quad k = \frac{1-i}{d}$$

$$I = \int dS j \approx 2\pi r \sigma_D \int dx E(x) = 2\pi r \sigma_D E \operatorname{Re} \left(\frac{1}{k} \right)$$

$$= \pi \sigma_D E r d = \pi \sigma_D r d \frac{V}{L} = \frac{V}{R_\omega}$$

$$d \approx \frac{c}{\sqrt{2\pi \sigma_D \omega}}$$

$$R_\omega = \frac{L}{\pi \sigma_D r d} = \frac{L}{cr} \sqrt{\frac{2\omega}{\pi \sigma_D}}$$

$$R_{dc} = \frac{L}{\pi \sigma_D r^2}$$

$$\frac{R_\omega}{R_{dc}} = \frac{r}{d} \gg 1$$

Plasma-Oszillationen

Maxwell-Gleichungen in der Substanz mit freien Ladungen (Metall)

$$i\vec{k} \cdot \vec{\mathbf{D}} = 0 \quad \rightarrow \quad i\epsilon(\omega) \vec{k} \cdot \left(-i\vec{k} \phi + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}} \right) = 0$$

$$i\vec{k} \times \vec{\mathbf{H}} + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{D}} = 0 \quad \rightarrow \quad i\mu^{-1} \vec{k} \times (i\vec{k} \times \vec{\mathbf{A}}) + \frac{i\omega \epsilon(\omega)}{c} \left(-i\vec{k} \phi + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}} \right) = 0$$

$$\vec{\mathbf{B}} = i\vec{k} \times \vec{\mathbf{A}} \qquad \vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -i\vec{k} \phi + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}} \qquad \vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}}$$

Freie Ladungen berücksichtigt (Lorentz-Drude)

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\text{geb}} - \frac{4\pi\sigma_{\text{D}}}{i\omega(1 - i\omega\tau)}$$

Maxwell-Gleichungen in der Substanz mit freien Ladungen (Metall)

$$i\vec{k} \cdot \vec{\mathbf{D}} = 0 \quad \rightarrow \quad i\epsilon(\omega) \vec{k} \cdot \left(-i\vec{k} \phi + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}} \right) = 0$$

$$i\vec{k} \times \vec{\mathbf{H}} + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{D}} = 0 \quad \rightarrow \quad i\mu^{-1} \vec{k} \times (i\vec{k} \times \vec{\mathbf{A}}) + \frac{i\omega \epsilon(\omega)}{c} \left(-i\vec{k} \phi + \frac{i\omega}{c} \vec{\mathbf{A}} \right) = 0$$

Coulomb Eichung $\vec{k} \cdot \vec{\mathbf{A}} = 0 \quad \rightarrow \quad \phi = 0$ Hier nehmen wir an, dass $\epsilon \neq 0$

$$(\vec{k})^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} \vec{\mathbf{A}} = 0$$

Für $\epsilon(\omega) = 0$ es gibt noch eine Möglichkeit:

$$\vec{k} \times \vec{\mathbf{A}} = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{\mathbf{A}} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\mathbf{A}} = 0 \text{ aber } \phi \neq 0$$

Längswellen

Plasma-Wellen

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} \quad \vec{A} = 0$$

und

$$\epsilon(\vec{k}, \omega) = 0$$

Lorentz-Drude

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\text{geb}} - \frac{4\pi\sigma_D}{i\omega(1 - i\omega\tau)} = \epsilon_{\text{geb}} - \frac{4\pi n_f e^2 \tau}{m i \omega (1 - i\omega\tau)}$$

$$\omega\tau \gg 1$$

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_{\text{geb}} - \frac{4\pi n_f e^2}{m\omega^2} = \epsilon_{\text{geb}} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

$$\omega_p \equiv \sqrt{\frac{4\pi n_f e^2}{m\epsilon_{\text{geb}}}}$$

Plasma-Wellen

Lorentz-Drude

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\text{geb}} - \frac{4\pi\sigma_D}{i\omega(1 - i\omega\tau)} = \epsilon_{\text{geb}} - \frac{4\pi n_f e^2 \tau}{mi\omega(1 - i\omega\tau)}$$

$$\omega\tau \gg 1$$

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_{\text{geb}} - \frac{4\pi n_f e^2}{m\omega^2} = \epsilon_{\text{geb}} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad \omega_p \equiv \sqrt{\frac{4\pi n_f e^2}{m\epsilon_{\text{geb}}}}$$

$\vec{k}$ beliebig aber klein

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} \quad \vec{A} = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -i\vec{k}\phi_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}$$

Ladungsdichte

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t) = -i\vec{k}\phi_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{\epsilon_{\text{geb}}}{4\pi} k^2 \phi_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = \epsilon_{\text{geb}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi \langle \rho_{\text{frei}} \rangle = 4\pi \rho$$

Einfache Herleitung (Lorentz-Drude Modell)

$$m(\ddot{\vec{r}} + (1/\tau)\dot{\vec{r}}) = e\vec{\mathbf{E}}(t) \quad \xrightarrow{\omega\tau \gg 1} \quad m\ddot{\vec{r}} = e\vec{\mathbf{E}}(t) \quad \rightarrow \quad m\dot{\vec{j}}(\vec{r}, t) \approx e^2 n_f \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t)$$

$$\downarrow$$

$$-i\omega m \vec{j} = e^2 n_f \vec{\mathbf{E}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad i\vec{k} \cdot \vec{j} - i\omega \rho = 0$$

$$\epsilon_{\text{geb}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi \rho \quad \longrightarrow \quad \epsilon_{\text{geb}} i\vec{k} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi \rho$$

$$\omega_p \equiv \sqrt{\frac{4\pi n_f e^2}{m \epsilon_{\text{geb}}}}$$

Metall wird durchsichtig

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_{\text{geb}} - \frac{4\pi n_f e^2}{m\omega^2} = \epsilon_{\text{geb}} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

$$\omega\tau \gg 1$$

$$\omega_p \equiv \sqrt{\frac{4\pi n_f e^2}{m\epsilon_{\text{geb}}}}$$

$$\omega < \omega_p \quad \epsilon < 0$$

$\sqrt{\epsilon} = i\kappa$ - imaginär = (fast) totale Reflektion (Spiegel)

$$\omega > \omega_p \quad \epsilon > 0$$

$\sqrt{\epsilon} = n$ - real = durchsichtig

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Spezielle Relativitätstheorie

Galilei-Invarianz in Mechanik

Die Gesetze der Newton-Mechanik sind gleich in jedem Inertial-Bezugssystem

zwei Bezugssysteme: K und K'

$$t' = t \qquad x' = x - vt$$

im Bezugssystem K gilt:

$$m_i \ddot{x}_i = - \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j V(x_i - x_j)$$

im Bezugssystem K' gilt:

$$m_i \ddot{x}'_i = - \frac{\partial}{\partial x'_i} \sum_j V(x'_i - x'_j)$$

Die Bewegungsgleichungen sind
Galilei-Invariant

Wellen-Gleichung

zwei Bezugssysteme: K und K'

$$t' = t \qquad x' = x - vt$$

im Bezugssystem K gilt: $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(x, t) = 0$

im Bezugssystem K' gilt:

$$\left(\nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{2}{c^2} v \nabla' \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{c^2} (v \nabla')^2 \right) f(x', t') = 0$$

**Die Wellengleichung ist nicht
Galilei-Invariant**

Wellen-Gleichung

Die Wellengleichung ist nicht Galilei-Invariant???

Lösung: die Wellen breiten in der Substanz (Wasser, Luft ...) aus. Nach der Galilei-Transformation (im Bezugssystem K') bekommen wir eine bewegende Substanz. So ändert sich die Wellengleichung

Für einen Beobachter im Bezugssystem K' breiten die Wellen nach Links/Rechts mit verschiedenen Geschwindigkeiten:

$$c_{L/R} = c \pm v$$

Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Kontinuitätsgleichung
folgt aus den M.-G.

Nicht homogene Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

Die zwei nicht homogene Maxwell-Gleichungen ergeben



$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}) = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Maxwell-Gleichungen ergeben Wellen-Gleichungen

Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

Lorenz-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Elektromagnetische-Wellen, Äther

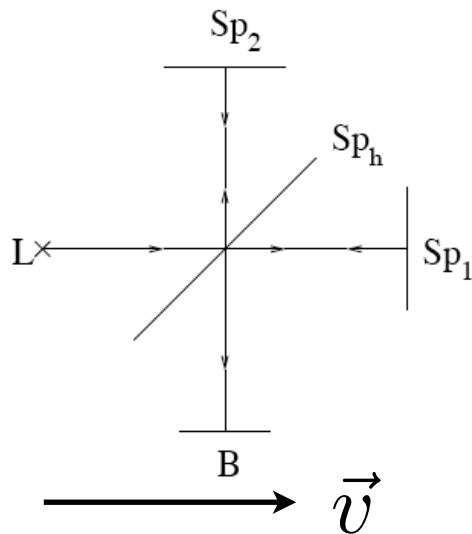
Maxwell-Gleichungen ergeben Wellengleichungen:
keine Galilei-Invarianz!? Wo ist die Substanz?

Drei Möglichkeiten:

- 1) Es gibt die Substanz: Äther
- 2) Maxwell-Gleichungen sind Falsch
- 3) Newton-Mechanik ist Falsch

Michelson-Morley Experiment

Hypothese: es gibt Äther und die Erde bewegt sich im Äther



$$t_{01} + t_{10} = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots \right)$$

$$t_{02} + t_{20} = \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right)$$

Das Interferenz-Bild ist
„empfindlich“ zur
Ausbreitungszeitdifferenz.

Experimentales Ergebnis: kein Effekt

Elektromagnetische-Wellen, Äther

Drei Möglichkeiten:

~~1) Es gibt die Substanz: Äther~~

2) Maxwell-Gleichungen sind Falsch

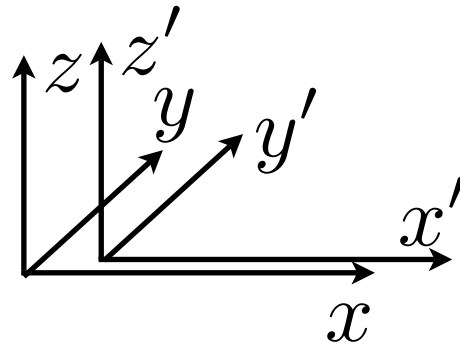
3) Newton-Mechanik ist Falsch

Einstein-Postulate

1. Natur-Gesetze sind identisch in allen inertialen Bezugssystemen (Relativität)

2. Lichtsgeschwindigkeit ist gleich in allen inertialen Bezugssystemen (kein Äther) und unabhängig von der Geschwindigkeit der Quelle

Lorentz-Transformationen



für $t = t' = 0$
 $\vec{r} = 0$ und $\vec{r}' = 0$
entsprechen dem selben Ort

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

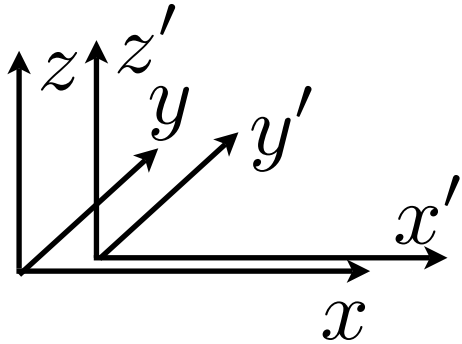
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

Lichtgeschwindigkeit ist gleich
in K und K'

Abstand (Interval)

$$s^2 \equiv c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \quad s^2 = 0 \rightarrow s'^2 = 0$$

Lorentz-Transformationen



für $t = t' = 0$
 $\vec{r} = 0$ und $\vec{r}' = 0$
entsprechen dem selben Ort

Abstand (Interval)

$$s^2 \equiv c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \quad s^2 = 0 \rightarrow s'^2 = 0$$

Homogener und isotroper Raum-Zeit

$$x' = L_{11}x + L_{12}y + L_{13}z + L_{14}ct$$

$$y' = L_{21}x + L_{22}y + L_{23}z + L_{24}ct$$

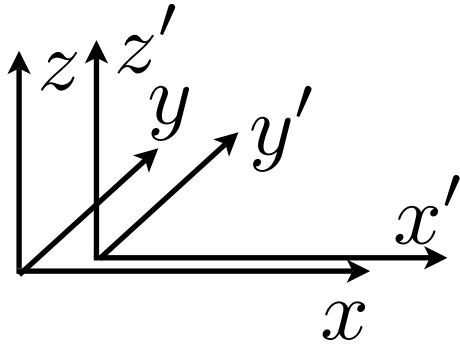
$$z' = L_{31}x + L_{32}y + L_{33}z + L_{34}ct$$

$$ct' = L_{41}x + L_{42}y + L_{43}z + L_{44}ct$$

$$s^2 = \lambda s'^2$$
$$\lambda = 1$$

$$s^2 = s'^2$$

Lorentz-Transformation



für $t = t' = 0$
 $\vec{r} = 0$ und $\vec{r}' = 0$
 entsprechen dem selben Ort

$$s^2 = s'^2$$

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$$

$$ct = i\tau \quad ct' = i\tau'$$

$$x^2 + \tau^2 = x'^2 + \tau'^2$$

$$x' = Ax + Bct$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$ct' = Cx + Dct$$

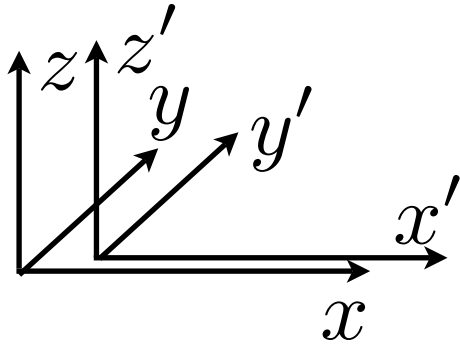
$$x' = Ax + iB\tau$$

$$\tau' = -iCx + D\tau$$

$$A = D = \cos \alpha$$

$$iB = iC = \sin \alpha$$

Lorentz-Transformation



$$s^2 = s'^2$$

$$A = D = \cos \alpha = \cosh \gamma \quad \gamma = i\alpha$$

$$B = C = -i \sin \alpha = -\sinh \gamma$$

$$x' = Ax + Bct$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

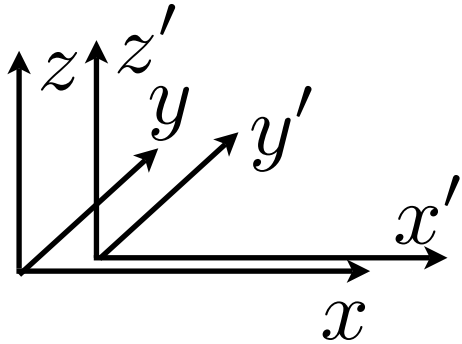
$$ct' = Cx + Dct$$

Der Ursprung von K'
bewegt sich mit Geschwindigkeit v ,
 $x = vt \rightarrow x' = 0$

$$0 = (\cosh \gamma)vt - (\sinh \gamma)ct$$

$$\tanh \gamma = \frac{v}{c}$$

Lorentz-Transformation



$$A = D = \cosh \gamma$$

$$B = C = -\sinh \gamma$$

$$\tanh \gamma = \frac{v}{c}$$

$$\cosh \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\sinh \gamma = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = Ax + Bct$$

$$y' = y$$

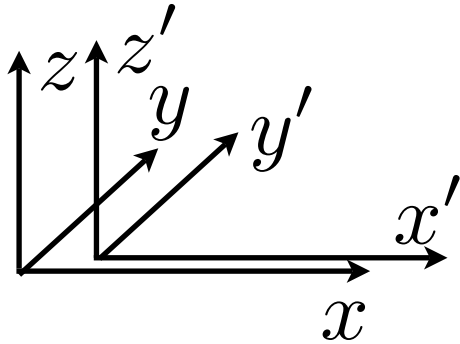
$$z' = z$$

$$ct' = Cx + Dct$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Zeit-Dilatation



$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

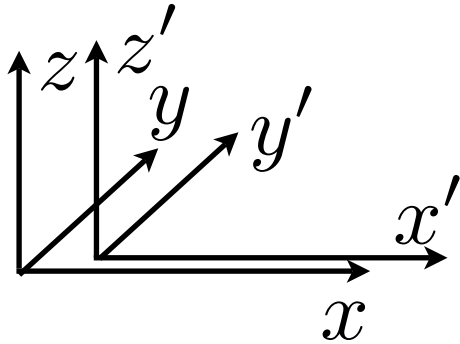
$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wir betrachten eine in K' ruhende Uhr im System K

$$\left. \frac{\partial t}{\partial t'} \right|_{x'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Die in K' ruhende Uhr geht von K aus betrachtet langsamer

Längenkontraktion (Lorentz contraction)



$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

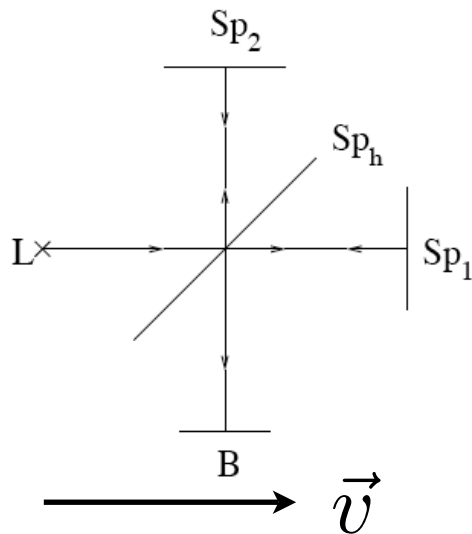
$$\left. \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta x = \left. \frac{\partial x}{\partial x'} \right|_t \Delta x' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta x'$$

Ein Maßstab, der in K' ruht und in der Richtung der Relativ-Bewegung ausgedehnt ist, erscheint also in K verkürzt. Dagegen bleiben die Entfernungen senkrecht zur Bewegungsrichtung unverändert

Michelson-Morley Experiment

Hypothese: es gibt Äther und die Erde bewegt sich im Äther



$$t_{01} + t_{10} = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v}$$

$$t_{01} + t_{10} = \frac{l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c+v} + \frac{l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c-v}$$

$$t_{02} + t_{20} = \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$t_{01} + t_{10} = t_{02} + t_{20}$$

4-Notation

Kontravariante Komponente

$$x^0 = ct \quad , \quad x^1 = x \quad , \quad x^2 = y \quad , \quad x^3 = z$$

Kovariante Komponente

$$x_0 = ct \quad , \quad x_1 = -x \quad , \quad x_2 = -y \quad , \quad x_3 = -z$$

$$s^2 = x_\mu x^\mu \quad \quad s'^2 = x'_\mu x'^\mu$$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

Lorentz-Transformaton

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

$$s^2 = x_{\mu} x^{\mu} = s'^2 = x'_{\mu} x'^{\mu}$$

$$x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu}$$

$$x'_{\mu} x'^{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu} \Lambda^{\mu}_{\beta} x^{\beta} = x_{\nu} x^{\nu} \quad g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} \Lambda^{\mu}_{\beta} = \delta^{\nu}_{\beta}$$

$$g_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\beta} g^{\beta\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Kontinuitätsgleichung
folgt aus den M.-G.

Nicht homogene Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

Lorenz-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

4-Größen (4-Vektoren, 4-Skalare)

Im Bezugssystem K hat 4-Vektor V^μ die (kontravarianten) Komponenten
 $V^\mu = (V^0, V^1, V^2, V^3)$

Im Bezugssystem K' hat der selbe Vektor die (kontravarianten) Komponenten
 $V'^\mu = \Lambda^\mu_\nu V^\nu$.

$$V'^\mu = \Lambda^\mu_\nu V^\nu$$

$$V'_\mu = \Lambda_\mu^\nu V_\nu$$

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu$$

$$\Lambda_\mu^\nu \Lambda^\mu_\beta = \delta^\nu_\beta$$

Für einen 4-Skalar S gilt $S' = S$. Z.B. $S = U^\mu V_\mu$

Ladungs- und Stromdichte als 4-Vektor

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

$$j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j})$$

$$j^\mu = (c\rho, \rho\vec{v}) = \rho(c, \vec{v}) = \rho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u^\mu$$

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (c, \vec{v}) \quad \text{4-Vektor}$$

Ladungs- und Stromdichte als 4-Vektor

$$j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j})$$

$$j^\mu \equiv (c\rho, \rho\vec{v}) = \rho(c, \vec{v}) = \rho\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u^\mu$$

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (c, \vec{v}) \quad \text{4-Vektor}$$

Wenn $\rho\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ist 4-Skalar, dann ist j^μ ein 4-Vektor

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{dq}{dV_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \rho\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dq}{dV_0} \text{ - 4-Skalar}$$

Ladungs- und Stromdichte als 4-Vektor

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j})$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{Kovariant}$$

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right) \qquad \partial^\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right)$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

4-Potential

$$A^\mu \equiv (\phi, \vec{A}) \quad \partial_\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right) \quad \partial^\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right)$$

A^μ ist ein 4-Vektor, d.h., $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$

Lorenz-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

Lorenz-Eichung ist Lorentz-Invariant

Maxwell-Gleichungen

$$A^\mu \equiv (\phi, \vec{\mathbf{A}})$$

$$j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j})$$

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right) \quad \partial^\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right)$$

Lorenz-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \partial_\mu A^\mu = 0$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\longrightarrow -\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$\square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

Kontinuitätsgleichung

$$\square \equiv -\partial_\nu \partial^\nu$$

4-Skalar

Elektromagnetischer Feldtensor

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right)$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

$$\partial^\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right)$$

$$\mathbf{B}_1 = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3$$

$$\mathbf{E}_1 = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1$$

u.s.w.

Elektromagnetischer Feldtensor

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Elektromagnetischer Feldtensor

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} \qquad \partial_\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right)$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \qquad \partial^\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right)$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad \text{Antisymmetrischer Tensor}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right)$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

$$\partial^\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right)$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \xrightarrow{\partial_\nu A^\nu = 0} \partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right)$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

$$\partial^\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right)$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} = \partial^\lambda \partial^\mu A^\nu - \partial^\lambda \partial^\nu A^\mu$$

$$\partial^\mu F^{\nu\lambda} = \partial^\mu \partial^\nu A^\lambda - \partial^\mu \partial^\lambda A^\nu$$

$$\partial^\nu F^{\lambda\mu} = \partial^\nu \partial^\lambda A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu A^\lambda$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$$

Maxwell-Gleichungen, Zusammenfassung

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right)$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$$

$$\partial^\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right)$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$$

Lorentz-Transformation der Felder

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F'^{\mu\nu} = \partial'^\mu A'^\nu - \partial'^\nu A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

z.B.

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \gamma & 0 & 0 & -\sinh \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \gamma & 0 & 0 & \cosh \gamma \end{pmatrix}$$

$$\tanh \gamma = \frac{v}{c}$$

$$\cosh \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\sinh \gamma = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Lorentz-Transformation der Felder

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \gamma & 0 & 0 & -\sinh \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \gamma & 0 & 0 & \cosh \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} E'_1 &= F'^{10} = \Lambda^1{}_\alpha \Lambda^0{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^1{}_1 \Lambda^0{}_\beta F^{1\beta} \\ &= \cosh \gamma F^{10} - \sinh \gamma F^{13} \\ &= \cosh \gamma E_1 - \sinh \gamma B_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'_2 &= F'^{13} = \Lambda^1{}_\alpha \Lambda^3{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^1{}_1 \Lambda^3{}_\beta F^{1\beta} \\ &= -\sinh \gamma F^{10} + \cosh \gamma F^{13} \\ &= \cosh \gamma B_2 - \sinh \gamma E_1 \end{aligned}$$

Lorentz-Transformation der Felder

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \gamma & 0 & 0 & -\sinh \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \gamma & 0 & 0 & \cosh \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} E'_2 &= F'^{20} = \Lambda^2{}_\alpha \Lambda^0{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^2{}_2 \Lambda^0{}_\beta F^{2\beta} \\ &= \cosh \gamma F^{20} - \sinh \gamma F^{23} \\ &= \cosh \gamma E_2 + \sinh \gamma B_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'_1 &= -F'^{23} = -\Lambda^2{}_\alpha \Lambda^3{}_\beta F^{\alpha\beta} = -\Lambda^2{}_2 \Lambda^3{}_\beta F^{2\beta} \\ &= \sinh \gamma F^{20} - \cosh \gamma F^{23} \\ &= \cosh \gamma B_1 + \sinh \gamma E_2 \end{aligned}$$

Lorentz-Transformation der Felder

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \gamma & 0 & 0 & -\sinh \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \gamma & 0 & 0 & \cosh \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} E'_3 &= F'^{30} = \Lambda^3{}_\alpha \Lambda^0{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^3{}_\alpha (\cosh \gamma F^{\alpha 0} - \sinh \gamma F^{\alpha 3}) \\ &= -\sinh \gamma (\cosh \gamma F^{00} - \sinh \gamma F^{03}) + \cosh \gamma (\cosh \gamma F^{30} - \sinh \gamma F^{33}) \\ &= F^{30} = E_3 \end{aligned}$$

genauso

$$B'_3 = B_3$$

Lorentz-Transformation der Felder, Zusammenfassung

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \gamma & 0 & 0 & -\sinh \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \gamma & 0 & 0 & \cosh \gamma \end{pmatrix}$$

$$E'_3 = E_3$$

$$B'_3 = B_3$$

$$E'_1 = \cosh \gamma E_1 - \sinh \gamma B_2$$

$$B'_2 = \cosh \gamma B_2 - \sinh \gamma E_1$$

$$E'_2 = \cosh \gamma E_2 + \sinh \gamma B_1$$

$$B'_1 = \cosh \gamma B_1 + \sinh \gamma E_2$$

$$\vec{\mathbf{E}}'_\parallel = \vec{\mathbf{E}}_\parallel \quad \vec{\mathbf{B}}'_\parallel = \vec{\mathbf{B}}_\parallel$$

$$\vec{\mathbf{E}}'_\perp = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\vec{\mathbf{E}}_\perp + \frac{\vec{v} \times \vec{\mathbf{B}}_\perp}{c} \right)$$

$$\vec{\mathbf{B}}'_\perp = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\vec{\mathbf{B}}_\perp - \frac{\vec{v} \times \vec{\mathbf{E}}_\perp}{c} \right)$$

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Lorentz-Invarianz der Elektrodynamik, Anwendungen

Lorentz-Transformation der Felder

$$\vec{v} \longrightarrow -\vec{v}$$

$$\vec{\mathbf{E}}'_{\parallel} = \vec{\mathbf{E}}_{\parallel}$$

$$\vec{\mathbf{B}}'_{\parallel} = \vec{\mathbf{B}}_{\parallel}$$

$$\vec{\mathbf{E}}'_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\vec{\mathbf{E}}_{\perp} + \frac{\vec{v} \times \vec{\mathbf{B}}_{\perp}}{c} \right)$$

$$\vec{\mathbf{B}}'_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\vec{\mathbf{B}}_{\perp} - \frac{\vec{v} \times \vec{\mathbf{E}}_{\perp}}{c} \right)$$

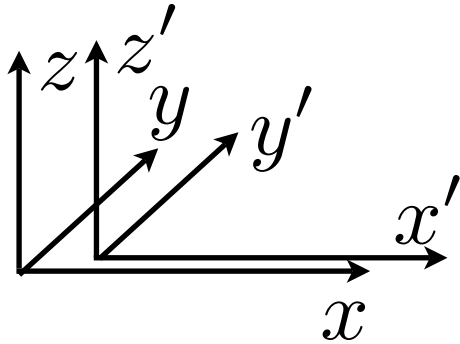
$$\vec{\mathbf{E}}_{\parallel} = \vec{\mathbf{E}}'_{\parallel}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_{\parallel} = \vec{\mathbf{B}}'_{\parallel}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\vec{\mathbf{E}}'_{\perp} - \frac{\vec{v} \times \vec{\mathbf{B}}'_{\perp}}{c} \right)$$

$$\vec{\mathbf{B}}_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\vec{\mathbf{B}}'_{\perp} + \frac{\vec{v} \times \vec{\mathbf{E}}'_{\perp}}{c} \right)$$

Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung



$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wir betrachten eine in K' ruhende Punktladung,

Es gilt:

$$\vec{\mathbf{E}}' = \frac{qr'\vec{\mathbf{r}}'}{r'^3}$$

$$\vec{\mathbf{B}}' = 0$$

Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}_{\parallel} &= \vec{\mathbf{E}}'_{\parallel} & \vec{\mathbf{E}}_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\vec{\mathbf{E}}'_{\perp} - \frac{\vec{v} \times \vec{\mathbf{B}}'_{\perp}}{c} \right) \\ \vec{\mathbf{B}}_{\parallel} &= \vec{\mathbf{B}}'_{\parallel} & \vec{\mathbf{B}}_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\vec{\mathbf{B}}'_{\perp} + \frac{\vec{v} \times \vec{\mathbf{E}}'_{\perp}}{c} \right)\end{aligned}$$

$$\vec{\mathbf{E}}' = \frac{q\vec{r}'}{r'^3}$$

$$\vec{\mathbf{B}}' = 0$$

$$E_x = E'_x = \frac{qx'}{r'^3} \qquad B_x = B'_x = 0$$

$$E_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(E'_y + \frac{vB'_z}{c} \right) = \frac{qy'}{r'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(E'_z - \frac{vB'_y}{c} \right) = \frac{qz'}{r'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$B_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(B'_y - \frac{vE'_z}{c} \right) = -\frac{qvz'}{cr'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$B_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(B'_z + \frac{vE'_y}{c} \right) = \frac{qvy'}{cr'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y \quad z' = z$$

$$E_x = \frac{qx'}{r'^3} = \frac{q(x - vt)}{r'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E_y = \frac{qy'}{r'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{qy}{r'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E_z = \frac{qz'}{r'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{qz}{r'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$B_x = 0$$

$$B_y = -\frac{qvz'}{cr'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{qvz}{cr'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$B_z = \frac{qvy'}{cr'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{qvy}{cr'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{q}{r'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt, y, z)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{qv}{cr'^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (0, -z, y)$$

$$r'^3 = \left(\frac{(x - vt)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 + z^2 \right)^{3/2}$$

Liénard-Wichert-Potentiale (noch mal)

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3r_a \frac{\rho(\vec{r}_a, t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}_a|)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r_a \frac{\vec{j}(\vec{r}_a, t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}_a|)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

Punktladung q befindet sich zur Zeit t im Ort $\vec{r}_0(t)$

$$\rho(\vec{r}, t) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q\vec{v}_0(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

$$\vec{v}_0(t) = \frac{d\vec{r}_0(t)}{dt}$$

Im Ort-Zeit-Punkt $(\vec{r}, t)$ bekommen wir den Beitrag aus der Zeit τ so, dass $\tau = t - R/c$, wo $R \equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$

Die Gleichung $|\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)| = c(t - \tau)$ hat immer eine Lösung

Hier ist τ keine Eigenzeit

Liénard-Wichert-Potentiale (noch mal)

Wir transformieren ins Bezugssystem wo $\vec{v}_0(\tau)=0$

$$\rho(\vec{r}, t) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \qquad \vec{v}_0(t) = \frac{d\vec{r}_0(t)}{dt}$$

Im Ort-Zeit-Punkt $(\vec{r}, t)$ bekommen wir den Beitrag aus der Zeit τ so, dass $\tau = t - R/c$, wo $R \equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$

Hier ist τ keine Eigenzeit

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \int d^3r_a \frac{q\delta(\vec{r}_a - \vec{r}_0(t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}_a|))}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \\ &= \int d^3r_a \frac{q\delta(\vec{r}_a - \vec{r}_0(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = \frac{q}{R} \end{aligned}$$

$$t'(\vec{r}_a, \vec{r}, t) \equiv t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}_a| \qquad \frac{d\vec{r}_0(t')}{dt'} \Big|_{t'=\tau} = 0$$

Liénard-Wichert-Potentiale (noch mal)

Gauß'sches System

Wir transformieren ins Bezugssystem wo $\vec{v}_0(\tau)=0$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q\vec{v}_0(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \quad \vec{v}_0(t) = \frac{d\vec{r}_0(t)}{dt}$$

Im Ort-Zeit-Punkt $(\vec{r}, t)$ bekommen wir den Beitrag aus der Zeit τ so, dass $\tau = t - R/c$, wo $R \equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$

Hier ist τ keine Eigenzeit

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \int d^3r_a \frac{q\vec{v}_0\left(t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}_a|\right) \delta\left(\vec{r}_a - \vec{r}_0\left(t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}_a|\right)\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \\ &= \int d^3r_a \frac{q\vec{v}_0(t') \delta(\vec{r}_a - \vec{r}_0(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} = 0 \end{aligned}$$



$$\vec{v}_0(t')|_{t'=\tau} = 0$$

$$t'(\vec{r}_a, \vec{r}, t) \equiv t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}_a|$$

Liénard-Wichert-Potentiale (noch mal)

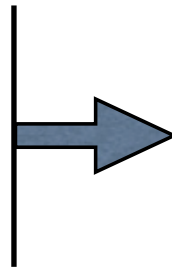
Wir transformieren ins Bezugssystem wo $\vec{v}_0(\tau)=0$

Im Ort-Zeit-Punkt $(\vec{r}, t)$ bekommen wir den Beitrag aus der Zeit τ so,
dass $\tau = t - R/c$, wo $R \equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$

Hier ist τ keine Eigenzeit

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{R} = \frac{q}{c(t - \tau)}$$



$$A^\mu(\vec{r}, t) = \left. \frac{qu_0^\mu}{R_\nu u_0^\nu} \right|_\tau$$

$$R^\nu \equiv (c(t - \tau), \vec{r} - \vec{r}_0(\tau))$$

$$u_0^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} (c, \vec{v}_0)$$

Liénard-Wichert-Potentiale (noch mal)

Gauß'sches System

Wir transformieren zurück ins Bezugssystem wo der Beobachter ruht

Im Ort-Zeit-Punkt $(\vec{r}, t)$ bekommen wir den Beitrag aus der Zeit τ so,
dass $\tau = t - R/c$, wo $R \equiv |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$

Hier ist τ keine Eigenzeit

$$R^\nu \equiv (c(t - \tau), \vec{r} - \vec{r}_0(\tau))$$

$$u_0^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} (c, \vec{v}_0)$$

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{q u_0^\mu}{R_\nu u_0^\nu} \Big|_\tau = \frac{q(c, \vec{v}_0)}{c^2(t - \tau) - \vec{v}_0(\vec{r} - \vec{r}_0)} \Big|_\tau = \frac{q(c, \vec{v}_0)}{cR - \vec{v}_0 \vec{R}} \Big|_\tau$$

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{q(c, \vec{v}_0)}{c \left(R - \frac{\vec{v}_0 \vec{R}}{c} \right)} \Big|_\tau$$

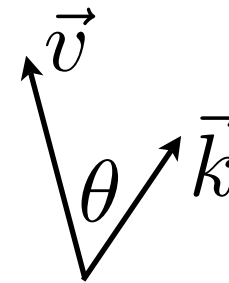
Doppler-Effekt

Nicht relativistischer Fall, z.B. Schall

$$\delta\rho = \delta\rho_0 e^{-i\varphi}$$

$$\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r}$$

Der Zuhörer bewegt sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$
 $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$



Im Bezugssystem K' wo der Zuhörer ruht gilt:

$$\varphi = \omega t - \vec{k}(\vec{r}' + \vec{v}t) = \omega' t - \vec{k}\vec{r}'$$

$$\omega' \equiv \omega - \vec{k}\vec{v} = \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right) \quad c - \text{Schallgeschwindigkeit}$$

Doppler-Effekt

Relativistischer Fall, Licht

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{-i\varphi}$$

$$\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r} = k_\mu x^\mu$$

Der Zuschauer bewegt sich mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$

$$\varphi = k_\mu x^\mu = k'_\mu x'^\mu$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y \quad z' = z$$

$$k'_x = \frac{k_x - \frac{v\omega}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\omega' = \frac{\omega - vk_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$k'_y = k_y \quad k'_z = k_z$$

$\omega = c|\vec{k}|$ und $\omega' = c|\vec{k}'|$ - Einstein-Postulat

φ - 4-Skalar



$k^\mu \equiv \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$ - 4-Vektor

Doppler-Effekt

Relativistischer Fall, Licht

Der Zuschauer bewegt sich mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$

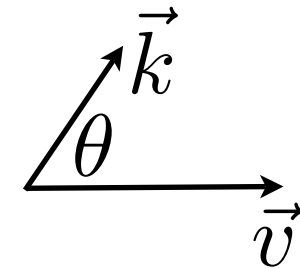
$$\omega' = \frac{\omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Longitudinale Doppler-Verschiebung $\cos \theta = \pm 1$

$$\omega' = \frac{\omega \left(1 \mp \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \omega \sqrt{\frac{1 \mp \frac{v}{c}}{1 \pm \frac{v}{c}}}$$

Transversale Doppler-Verschiebung $\cos \theta = 0$

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Relativistische Mechanik

Einstein erkannte, dass die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und die Lorentz-Invarianz nicht auf die Elektrodynamik beschränkt ist, sondern allgemeine Gültigkeit in der Physik hat.

Freies relativistisches Teilchen

Wirkung $S = -mc \int_a^b ds = -mc^2 \int_a^b d\tau$

$$ds \equiv \sqrt{dx^\mu dx_\mu}$$

Lagrange-Funktion $S = \int_a^b L dt \rightarrow L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Eigenzeit

$$x^\mu(t) \equiv (ct, \vec{r}(t)) \rightarrow \vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$cd\tau \equiv ds = \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \sqrt{(cdt)^2 - (\vec{v}dt)^2}$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Energie und Impuls

Lagrange-Funktion $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \vec{p}\vec{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \stackrel{v \ll c}{\approx} mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

4-Impuls

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \frac{m(c, \vec{v})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mu^\mu$$

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$$

Weltgeschwindigkeit

$$x^\mu(t) \equiv (ct, \vec{r}(t)) \rightarrow \vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\vec{v})^2}{c^2}}} (c, \vec{v})$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{(\vec{v})^2}{c^2}}$$

$$u^\mu \text{ - 4-Vektor, d.h., } u'^\mu = \Lambda^\mu_\nu u^\nu$$

Bewegungsgleichung, Kraft

Lagrange-Funktion $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{(\dot{\vec{r}})^2}{c^2}} - U(\vec{r}, t)$

$U(\vec{r}, t)$ - potenzielle Energie, nicht Lorentz-Invariant

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{m\dot{r}_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \vec{p}\vec{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + U(\vec{r}, t) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + U(\vec{r}, t)$$

Bewegungsgleichung

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i} = -\frac{\partial U}{\partial r_i} = K_i \quad \text{genau wie in der nichtrelativistischen Mechanik}$$

$$\text{aber} \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m\dot{r}_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m\ddot{r}_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m\dot{r}_i(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

Energie

$$E = \vec{p}\vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + U(\vec{r}, t) = E_{\text{kin}} + U \quad E_{\text{kin}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i} = -\frac{\partial U}{\partial r_i} = K_i \quad \text{Bewegungsgleichung}$$

Energie-“Erhaltung“

$$\frac{d}{dt} E = \dot{\vec{p}}\vec{v} + \vec{p}\dot{\vec{v}} - \frac{d}{dt} L = \dot{\vec{p}}\vec{v} + \vec{p}\dot{\vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \dot{\vec{r}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \dot{\vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} E_{\text{kin}} = \frac{d}{dt} (E - U) = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{d}{dt} U = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \vec{v} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \vec{v} = \vec{K} \vec{v}$$

Leistung

4-Kraft

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{K}$$

$$\frac{d}{dt} E_{\text{kin}} = \vec{K} \vec{v}$$

$$p^\mu = \left(\frac{E_{\text{kin}}}{c}, \vec{p} \right) = \frac{m(c, \vec{v})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m u^\mu \quad \text{nur kinetische Energie}$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{Eigenzeit}$$

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{E_{\text{kin}}}{c}, \vec{p} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{\vec{K} \vec{v}}{c}, \vec{K} \right) \equiv K^\mu \quad \text{4-Kraft}$$

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{du^\mu}{d\tau} = K^\mu$$

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Relativistische Mechanik eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld

Wirkung und Lagrange-Funktion

Wirkung $S = \int_a^b \left(-mcds - \frac{q}{c} A_\mu dx^\mu \right)$

$$ds \equiv \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \sqrt{(cdt)^2 - (\vec{v}dt)^2} = cd\tau$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Lagrange-Funktion

$$S = \int_a^b L dt \quad \rightarrow \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi + \frac{q}{c} \vec{\mathbf{A}} \vec{v}$$

$$L(\vec{r}, \vec{v}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t)$$

Bewegungsgleichung, Lorentz-Kraf

Lagrange-Funktion $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c} \vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) \vec{v}$

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{m\dot{r}_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c} A_i = p_i + \frac{q}{c} A_i$$

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{q}{c} \vec{\mathbf{A}}$$

Kanonischer Impuls

$$\vec{p} \equiv \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Kinematischer Impuls

Bewegungsgleichung

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i} = -q \frac{\partial \phi}{\partial r_i} + \frac{q}{c} v_j \frac{\partial A_j}{\partial r_i}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -q \vec{\nabla} \phi + \frac{q}{c} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{\mathbf{A}}) = -q \vec{\nabla} \phi + \frac{q}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}) + \frac{q}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\mathbf{A}}$$

Bewegungsgleichung, Lorentz-Kraf

Lagrange-Funktion $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \vec{v}$

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A}$$

Kanonischer Impuls

Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -q\vec{\nabla}\phi + \frac{q}{c}\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{q}{c}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\vec{p} \equiv \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Kinematischer Impuls

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{q}{c} \frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -q\vec{\nabla}\phi - \frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}$$

Lorentz-Kraft

Energie

$$\mathcal{E} = \vec{P}\vec{v} - L = \vec{p} \cdot \vec{v} + \frac{q}{c} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\phi \quad E_{\text{kin}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\mathcal{E} = E_{\text{kin}} + q\phi = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} + q\phi = \sqrt{m^2c^4 + c^2 \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{\mathbf{A}} \right)^2} + q\phi$$

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2 \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{\mathbf{A}} \right)^2} + q\phi \quad \text{Hamilton-Funktion}$$

$$H(\vec{P}, \vec{r}, t) = \sqrt{m^2c^4 + c^2 \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) \right)^2} + q\phi(\vec{r}, t)$$

Energie-“Erhaltung“

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E} = \dot{\vec{P}}\vec{v} + \vec{P}\dot{\vec{v}} - \frac{d}{dt}L = \dot{\vec{P}}\vec{v} + \vec{P}\dot{\vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\dot{\vec{r}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\dot{\vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c}\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t)\vec{v} \qquad \mathcal{E} = E_{\text{kin}} + q\phi$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E} = -\frac{\partial L}{\partial t} = q\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{q}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}\vec{v} = \frac{d}{dt}(E_{\text{kin}} + q\phi)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_{\text{kin}} &= \frac{d}{dt}(\mathcal{E} - q\phi) = q\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{q}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}\vec{v} - q\frac{d}{dt}\phi \\ &= q\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{q}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}\vec{v} - q\frac{\partial \phi}{\partial t} - q\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\phi = q\vec{\mathbf{E}}\vec{v} = \left(q\vec{\mathbf{E}} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{\mathbf{B}}\right)\vec{v} \end{aligned}$$

Leistung der
Lorentz-Kraft

Theoretische Physik I
Sommer-Semester 2008

Elektrodynamik

Dozent:
Alexander Shnirman

HS C, Do. 10-12, Fr. 10-12

Elektrodynamik als Feldtheorie

Feldtheorie

Lagrange-Funktion für N Teilchen

$$L = L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, t) = L(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t)$$

$\vec{r}_i, \vec{v}_i$ - Freiheitsgrade , i - Index

Feld, z.B.

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) \quad \vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) \quad \vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) \quad \phi(\vec{r})$$

$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r})$ - Freiheitsgrade , $\vec{r}$ - Index

**Feld: in jedem Ort gibt es einige
Freiheitsgraden**

Feldtheorie

Beispiel: 1-komponentiges (skalares) Feld $\phi(\vec{r}, t)$

Lagrange-Funktion für das Feld

$$\begin{aligned} L &= L(\phi(\vec{r}_1, t), \phi(\vec{r}_2, t), \dots, \dot{\phi}(\vec{r}_1, t), \dot{\phi}(\vec{r}_2, t), \dots) \\ &= L[\phi(\vec{r}, t), \dot{\phi}(\vec{r}, t)] \quad \text{Funktion von unendlich vielen Variablen:} \\ &\hspace{15em} \text{Funktional} \end{aligned}$$

$$L = \int dV \mathcal{L}(\phi(\vec{r}), \vec{\nabla} \phi(\vec{r}), \dot{\phi}(\vec{r}))$$

Oft nur Funktion des Feldes und der Gradienten (im Raum und in der Zeit)

$\mathcal{L}(\phi(\vec{r}), \vec{\nabla} \phi(\vec{r}), \dot{\phi}(\vec{r}))$ - Lagrange-Dichte

$$S = \int dt L = \int dt dV \mathcal{L}(\phi(\vec{r}), \vec{\nabla} \phi(\vec{r}), \dot{\phi}(\vec{r})) \quad \text{Wirkung}$$

Konkreter Beispiel

Skalar-Feld $\phi(\vec{r}, t)$

$$L = \int dV \mathcal{L}(\phi(\vec{r}), \vec{\nabla} \phi(\vec{r}), \dot{\phi}(\vec{r}))$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2} C \phi^2 - \frac{1}{4} D \phi^4$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2} C \phi^2 - \frac{1}{4} D \phi^4$$

$$S = \int dt L = \int dt dV \left[\frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2} C \phi^2 - \frac{1}{4} D \phi^4 \right]$$

Bewegungsgleichungen

$$S = \int dt dV \mathcal{L}(\phi(\vec{r}), \vec{\nabla} \phi(\vec{r}), \dot{\phi}(\vec{r})) \quad \text{Wirkung}$$

Bewegungsgleichungen ergeben
sich aus dem Prinzip, dass die
Wirkung extremal ist

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt dV \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_i \phi)} \delta \nabla_i \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{\phi})} \delta \dot{\phi} \right] \quad \text{partiell es Integrieren} \\ &= \int dt dV \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \left(\nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_i \phi)} \right) \delta \phi - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{\phi})} \right) \delta \phi \right] + \oint dS \dots \\ &= \int dt dV \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \left(\nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_i \phi)} \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{\phi})} \right) \right] \delta \phi = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{\phi})} \right) + \left(\nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_i \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad \text{Bewegungsgleichung}$$

Konkreter Beispiel

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\phi})} \right) + \left(\nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_i \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad \text{Bewegungsgleichung}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2} C \phi^2 - \frac{1}{4} D \phi^4$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi) (\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2} C \phi^2 - \frac{1}{4} D \phi^4$$

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\phi} - \nabla^2 \phi = -C \phi - D \phi^3$$

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = -C \phi - D \phi^3$$

Noch mal aber kovariant

Skalar-Feld $\phi(\vec{r}, t)$

$$S = \int d\Omega \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi)$$

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt dx dy dz \quad \text{Skalar}$$

S - Skalar $\rightarrow \mathcal{L}$ - Skalar

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$|\det \Lambda^\mu{}_\nu| = 1$$

Kovariante Bewegungsgleichung

Skalar-Feld $\phi(\vec{r}, t)$ $S = \int d\Omega \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi)$

$$\delta S = \int d\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \delta (\partial^\mu \phi) \right] \quad \text{partielles Integrieren}$$

$$= \int d\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \left(\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \right) \delta \phi \right] + \oint dS \dots$$

$$= \int d\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \right] \delta \phi$$

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

Bewegungsgleichung

z.B. $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi) (\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2} C \phi^2 - \frac{1}{4} D \phi^4$

$$= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial^\mu \phi) (\partial^\nu \phi) - \frac{1}{2} C \phi^2 - \frac{1}{4} D \phi^4$$

$$\partial^\mu g_{\mu\nu} \partial^\nu \phi = \partial^\mu \partial_\mu \phi = -C \phi - D \phi^3$$

Wirkung für die Teilchen und das Feld

$$S = \sum_i \int \left(-m c d s_i - \frac{q}{c} A_\mu(x_i) d x_i^\mu \right) - \frac{1}{16\pi c} \int d\Omega F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$d s_i \equiv \sqrt{d x_i^\mu d x_{i\mu}} = \sqrt{(c d t)^2 - (\vec{v}_i d t)^2} = c d \tau_i$$

keine Summe über i

$$- \sum_i \int \frac{q}{c} A_\mu(x_i) d x_i^\mu = - \frac{1}{c^2} \int d\Omega j^\mu A_\mu$$
$$d\Omega = d x^0 d x^1 d x^2 d x^3 = c d t d x d y d z$$

Wirkung für die Teilchen und das Feld

$$\begin{aligned} S &= -mc \sum_i \int ds_i - \frac{1}{c^2} \int d\Omega j^\mu A_\mu - \frac{1}{16\pi c} \int d\Omega F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= S_{\text{mech}} - \int d\Omega \left[\frac{1}{c^2} j^\mu A_\mu + \frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \end{aligned}$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= ([\partial_\mu A_\nu] - [\partial_\nu A_\mu])([\partial^\mu A^\nu] - [\partial^\nu A^\mu]) \\ &= 2[\partial_\mu A_\nu][\partial^\mu A^\nu] - 2[\partial_\mu A_\nu][\partial^\nu A^\mu] \end{aligned}$$

Wirkung für die Teilchen und das Feld

$$\begin{aligned} S &= -mc \sum_i \int ds_i - \frac{1}{c^2} \int d\Omega j^\mu A_\mu - \frac{1}{16\pi c} \int d\Omega F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= S_{\text{mech}} - \int d\Omega \left[\frac{1}{c^2} j^\mu A_\mu + \frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \end{aligned}$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2[(\vec{\mathbf{B}})^2 - (\vec{\mathbf{E}})^2]$$

Bewegungsgleichung

$$S = S_{\text{mech}} - \int d\Omega \left[\frac{1}{c^2} j^\mu A_\mu + \frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Wir nehmen jetzt an, dass die mechanische Bewegung der Teilchen und somit der Strom gegeben sind

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int d\Omega \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} \right]$$

$$(\delta F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}$$

$$\delta F^{\mu\nu} = \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu$$

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{c} \int d\Omega \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F_{\mu\nu} (\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu) \right] \\ &= -\frac{1}{c} \int d\Omega \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu \right] \\ &= -\frac{1}{c} \int d\Omega \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu - \left(\partial^\mu \frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \right) \delta A^\nu \right] + \cancel{\oint dS} \\ &= -\frac{1}{c} \int d\Omega \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu - \left(\partial_\nu \frac{1}{4\pi} F^{\nu\mu} \right) \delta A_\mu \right] \end{aligned}$$

Bewegungsgleichung

$$S = S_{\text{mech}} - \int d\Omega \left[\frac{1}{c^2} j^\mu A_\mu + \frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Wir nehmen jetzt an, dass die mechanische Bewegung der Teilchen und somit der Strom gegeben sind

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int d\Omega \left[\frac{1}{c} j^\mu - \left(\frac{1}{4\pi} \partial_\nu F^{\nu\mu} \right) \right] \delta A_\mu$$

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

Nicht homogene
Maxwell-Gl.

Energie-Impuls-Tensor

Skalar-Feld $\phi(\vec{r}, t)$

$$S = \int d\Omega \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi)$$

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

Bewegungsgleichung

$$T^\mu{}_\nu = (\partial^\mu \phi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \phi)} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}$$

Energie-Impuls-
Tensor

$$\partial^\nu T^\mu{}_\nu = 0$$

Erhaltungssatz

$$P^\mu \equiv \frac{1}{c} \int dS^\nu T^\mu{}_\nu = \text{const}$$

4-Impuls

Energie-Impuls-Tensor für e.m. Feld

$$W = \frac{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{B}}}{8\pi}$$

$$\vec{\mathbf{S}} \equiv \frac{c}{4\pi} (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}})$$

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) \right]$$

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix}$$