Theoretische Physik C - Zusammenfassung

Diese Zusammenfassung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.
Solltet ihr Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilt sie mir bitte mit: richard.gebauer@student.kit.edu

SI-System	Gauß-System

1 Maxwell-Gleichungen

1.1 MWG im Vakuum

Gaußsches Gesetz

SI-System	Gauß-System
$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$	$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho$

Gaußsches Gesetz für Magnetfelder

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

Induktionsgesetz

SI-System	Gauß-System
$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

Erweitertes Ampere-Gesetz

SI-System	Gauß-System
$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

1.2 MWG in Materie

Elektrische Flussdichte / Verschiebung

SI-System	Gauß-System
$\vec{D} := \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$	$\vec{D} := \vec{E} + 4\pi\vec{P}$

Magnetische Feldstärke

SI-System	Gauß-System
$\vec{H} := \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$	$\vec{H} := \vec{B} - 4\pi\vec{M}$

Gaußsches Gesetz

SI-System	Gauß-System
$\vec{\nabla}\vec{D} = \rho_{\text{frei}}$	$\vec{\nabla}\vec{D} = 4\pi\rho_{\text{frei}}$

Gaußsches Gesetz für Magnetfelder

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

Induktionsgesetz

SI-System	Gauß-System
$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

Erweitertes Ampere-Gesetz

SI-System	Gauß-System
$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{frei}}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{frei}}$

2 Elektrostatik

Coulomb-Gesetz

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dV'\rho(\vec{r'})\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} \qquad \Bigg| \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \int dV'\rho(\vec{r'})\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$$

Kraft auf Ladung

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Gauß-Gesetz (Integralform)

$$\oint_{\partial V} d\vec{A}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V dV\rho = \frac{1}{\epsilon_0}Q \qquad \Bigg| \qquad \oint_{\partial V} d\vec{A}\vec{E} = 4\pi\int_V dV\rho = 4\pi Q$$

Skalarpotential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dV'\frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \qquad \Bigg| \qquad \varphi(\vec{r}) = \int dV'\frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

Spannung

$$U_{1\to 2} = \varphi_2 - \varphi_1$$

Elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung für $\rho = 0$)

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \Bigg| \qquad \Delta\varphi = -4\pi\rho$$

Dirichlet-Randbedingung

Das Skalarpotential auf den Oberflächen S_i der Leiter ist bekannt (bspw. wenn der Leiter geerdet ist)

$$\varphi(\vec{r} \in S_i) = \phi_i$$

Flächenladungsdichte

kann durch Sprung des elektrischen Feldes an der Oberfläche bestimmt werden:

$$\sigma = \epsilon_0(E_{2,\perp} - E_{1,\perp}) \qquad \Bigg| \qquad \sigma = \frac{1}{4\pi}(E_{2,\perp} - E_{1,\perp})$$

2.1 Matrix der Kapazitäten

gibt Zusammenhang zwischen Ladungen und Potential auf den Oberflächen der Leiter an:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\phi_j$$

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{n} (C^{-1})_{ij}Q_j$$

Elektrostatische Energie

$$W = \frac{1}{2}\int dV'\rho(\vec{r'})\varphi(\vec{r'}) = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\phi_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} C_{ij}\phi_i\phi_j = \frac{1}{2}\sum_{ij}(C^{-1})_{ij}Q_iQ_j$$

2.2 Lösung der Laplace-Gleichung

Greensche Funktion [Definition hier bzgl. des Differentialoperators]

$$\Delta_r G(\vec{r}, \vec{r'}) = \delta(\vec{r} - \vec{r'})$$

Hieraus erhält man die (nicht eindeutig bestimmte) Funktion:

$$G(\vec{r}, \vec{r'}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Verschwindet G auf einer Oberfläche ∂V, d.h. $G(\vec{r}, \vec{r'})|_{\vec{r'} \in \partial V} = G(\vec{r}, \vec{r'})|_{\vec{r} \in \partial V} = 0$, lässt sich das Skalarpotential bestimmen zu (sofern $\varphi(\vec{r} \in \partial V)$, d.h. auf der Oberfläche, bekannt ist):

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) = &-\frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV' G(\vec{r}, \vec{r'}) \rho(\vec{r'}) \\ &- \int_{\partial V} dA' \varphi(\vec{r'}) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r'})}{\partial n'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) = &-4\pi \int_V dV' G(\vec{r}, \vec{r'}) \rho(\vec{r'}) \\ &- \int_{\partial V} dA' \varphi(\vec{r'}) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r'})}{\partial n'}\end{aligned}$$

Kugelflächenfunktionen

$$\text{Kugelflächenfunktionen } Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

$$\text{Zugeordnete Legendre-Polynome } P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

Hiermit kann man die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung schreiben als:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

2.3 Multipol-Entwicklung

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \sum_i \frac{p_i r_i}{r^3} + \sum_{ij} \frac{r_i Q_{ij} r_j}{2r^5} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\vec{r}^T \cdot Q \cdot \vec{r}}{r^5} + \dots \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{q}{r} + \sum_i \frac{p_i r_i}{r^3} + \sum_{ij} \frac{r_i Q_{ij} r_j}{2r^5} + \dots \\ &= \frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\vec{r}^T \cdot Q \cdot \vec{r}}{r^5} + \dots\end{aligned}$$

$$\text{Monopol } q = \int dV' \rho(\vec{r'})$$

$$\text{Dipol-Moment } p_i = \int dV' \rho(\vec{r'}) r'_i$$

$$\text{Quadrupol-Moment } Q_{ij} = \int dV' \rho(\vec{r'}) (3r'_i r'_j - (r')^2 \delta_{ij})$$

Multipol-Entwicklung in Kugelkoordinaten

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) q_{lm}$$

$$\varphi(r, \theta, \phi) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) q_{lm}$$

$$\text{Multipol-Moment } q_{lm} = \int dV' (r')^l Y^*_{lm}(\theta', \phi') \rho(\vec{r'})$$

3 Magnetostatik

Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r'}) \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \qquad \Big| \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r'}) \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

Kraft auf Strom

$$\vec{F} = \int dV' \vec{j}(\vec{r'}) \times \vec{B}(\vec{r'}) \qquad \Big| \qquad \vec{F} = \frac{1}{c}\int dV' \vec{j}(\vec{r'}) \times \vec{B}(\vec{r'})$$

Ampere-Gesetz (Integralform)

$$\oint_{\partial A} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 \int_A d\vec{A} \cdot \vec{j} = \mu_0 I \qquad \Big| \qquad \oint_{\partial A} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \int_A d\vec{A} \cdot \vec{j} = \frac{4\pi}{c} I$$

Vektorpotential

(besitzt Eichfreiheit: $\vec{A'} = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ für beliebiges $\chi(\vec{r})$)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \qquad \Big| \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Magnetische Flussdichte

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Magnetischer Fluss

$$\Phi_m = \int d\vec{A} \cdot \vec{B}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

B-Feld Lange Spule ($L >> r$, Anzahl Windungen N)

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I \qquad \Big| \qquad B = \frac{4\pi}{c}\frac{N}{L} I$$

B-Feld Kreisförmige Leiterschleife (in x-y-Ebene, Radius R)

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z \qquad \Big| \qquad \vec{B}(z) = \frac{2\pi}{c} I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

3.1 Magnetisches Dipol

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int dV' \left[\vec{r'} \times \vec{j}(\vec{r'})\right] \qquad \Big| \qquad \vec{m} = \frac{1}{2c}\int dV' \left[\vec{r'} \times \vec{j}(\vec{r'})\right]$$

Näherung des magnetischen Flusses

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\vec{e_r})\vec{e_r} - \vec{m}}{r^3}\right] \qquad \Big| \qquad \vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{3(\vec{m}\vec{e_r})\vec{e_r} - \vec{m}}{r^3}$$

Drehmoment in äußerem $\vec{B}$-Feld

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Dipol-Moment einer ebenen Leiterschleife (Flächennormale $\vec{n}$)

$$\vec{m} = I A \vec{n} \qquad \Bigg| \qquad \vec{m} = \frac{1}{c} I A \vec{n}$$

3.2 Induktivitätskoeffizienten

zwischen zwei Leiterschleifen C_i und C_j:

$$M_{ji} = M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \qquad \Bigg| \qquad M_{ji} = M_{ij} = \frac{1}{c} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Zusammenhang zwischen magnetischem Fluss und Strom

$$\Phi_{m,i} = \sum_j M_{ij} I_j$$

$$I_i = \sum_j (M^{-1})_{ij} \Phi_{m,j}$$

Eigeninduktivität L

$$\phi_m = LI$$

Magnetostatische Energie

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int dV' \vec{B}^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_{m,i} I_i \qquad \Bigg| \qquad W = \frac{1}{8\pi} \int dV' \vec{B}^2 = \frac{1}{2c} \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2c} \sum_i \Phi_{m,i} I_i$$

4 Elektrodynamik im Vakuum

Elektromotorische Kraft (Induktionsspannung)

$$\mathcal{E} = \oint_{\partial A} \vec{dl} \cdot \vec{E} = -\frac{d}{dt} \Phi_m = -\frac{d}{dt} \int_A d\vec{A} \cdot \vec{B} \qquad \Bigg| \qquad \mathcal{E} = \oint_{\partial A} \vec{dl} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \Phi_m = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_A d\vec{A} \cdot \vec{B}$$

4.1 MWG in verschiedenen Eichungen

Homogene MWG

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \Bigg| \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Eichfreiheit

für beliebige Funktion $\chi(\vec{r}, t)$ (aber für beide gleich!):

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \qquad \Bigg| \qquad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Inhomogene MWG: Lorenz-Eichung

SI	Gauß
$\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$	$\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$

Hieraus ergibt sich für die inhomogenen MWG:

SI	Gauß
$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$	$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$
$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}$	$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$

Inhomogene MWG: Coulomb-Eichung

$$\vec{\nabla}\vec{A} = 0$$

Hieraus ergibt sich für die inhomogenen MWG:

SI	Gauß
$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$	$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$
$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\mu_0\vec{j}$	$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$
$\Leftrightarrow \quad \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}_\perp$	$\Leftrightarrow \quad \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_\perp$

Für die Umformung der letzten Gleichung wurde eingeführt:

$$\vec{j} = \vec{j}_\parallel + \vec{j}_\perp \quad \text{mit} \quad \vec{\nabla}\vec{j}_\perp = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla}\times\vec{j}_\parallel = 0 \quad (\text{möglich, falls: } \vec{j}(|\vec{r}|\to\infty) = 0)$$

Poynting-Vektor

SI	Gauß
$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$	$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$

Impuls des EM-Feldes und Impuls-Dichte $\vec{g}_{em}$

$$\vec{P}_{em} = \int dV\,\vec{g}_{em} = \int dV\,\frac{\vec{S}}{c^2}$$

Elektromagnetischer Drehimpuls

$$\vec{L}_{em} = \int dV\,\vec{r}\times\vec{g}_{em} = \frac{1}{c^2}\int dV\,\vec{r}\times\vec{S}$$

Maxwellscher Spannungstensor

SI	Gauß
$T_{jk} = \epsilon_0 E_j E_k + \frac{1}{\mu_0}B_j B_k - \frac{\delta_{jk}}{2}\left(\epsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right)$	$T_{jk} = \frac{1}{4\pi}\left[E_j E_k + B_j B_k - \frac{\delta_{jk}}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)\right]$

4.2 Elektromagnetische Wellen

Benutzen Coulomb-Eichung und da im Vakuum ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$):

$$\nabla^2\varphi = 0 \overset{\text{Wahl}}{\Longrightarrow} \varphi = 0$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

Wellengleichung und d'Alembert-Operator

$$\Box f := \nabla^2 f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \text{mit} \quad f(\vec{r},t) \in \{A_x(\vec{r},t), A_y(\vec{r},t), A_z(\vec{r},t)\}$$

1D Lösung

$$f(x,t) = f_0 \cdot e^{i(kx-\omega t)} \quad \text{mit} \quad \omega = c|k|$$

3D Lösung

$$f(\vec{r},t) = f_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \quad \text{mit} \quad \omega = c|\vec{k}| = ck$$

Ebene Welle in 3D

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\omega\vec{A} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$	$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = ik\vec{A} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$
mit $\vec{E}_0 = i\omega\vec{A}_0$	mit $\vec{E}_0 = ik\vec{A}_0$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \quad \text{mit} \quad \vec{B}_0 = i\vec{k} \times \vec{A}_0$$

Haben im Vakuum TEM-Welle: $\vec{E} \perp \vec{k}$, $\vec{B} \perp \vec{k}$, $\vec{A} \perp \vec{k}$ und es gilt weiter: $\vec{S} \parallel \vec{k}$, $\vec{E} \perp \vec{B}$ und

$\vec{B} = \frac{1}{c}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) \times \vec{E}$	$\vec{B} = \left(\frac{\vec{k}}{k}\right) \times \vec{E}$
$\lvert\vec{E}\rvert = c\lvert\vec{B}\rvert$	$\lvert\vec{E}\rvert = \lvert\vec{B}\rvert$

Polarisation

kann durch komplexe Wahl von $\vec{A}_0$ beschrieben werden. Hieraus ergibt sich:

$$\vec{E} = E_{0,x}\vec{e}_x \cos(kz-\omega t) + E_{0,y}\vec{e}_y \sin(kz-\omega t)$$

$$\vec{B} = B_{0,y}\vec{e}_y \cos(kz-\omega t) - B_{0,x}\vec{e}_x \sin(kz-\omega t)$$

mit $B_{0,y} = \frac{E_{0,x}}{c}$ und $B_{0,x} = \frac{E_{0,y}}{c}$	mit $B_{0,y} = E_{0,x}$ und $B_{0,x} = E_{0,y}$

- Lineare Polarisation: $E_{0,x} = 0$ oder $E_{0,y} = 0$
- Zirkulare Polarisation: $E_{0,x} = E_{0,y}$
- Elliptische Polarisation: $0 \neq E_{0,x} \neq E_{0,y} \neq 0$

inhomogene Wellengleichung mit Quelle f

$$\Box\psi = \nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = f$$

Green-Funktion der Wellengleichung

löst die Wellengleichung für die Delta-Funktion als Quelle:

$$\Box G(\vec{r},t,\vec{r'},t') = \delta(\vec{r}-\vec{r'})\delta(t-t')$$

Kennt man G, so ergibt sich die partikuläre Lösung für eine allgemeine Quelle $f(\vec{r},t)$:

$$\psi_p(\vec{r},t) = \int dV'dt' G(\vec{r},t,\vec{r'},t') f(\vec{r'},t')$$

Als allgemeine Greensche Funktion für den d'Alembert-Operator erhält man:

$$G(\vec{r},t,\vec{r'},t') = -\frac{\delta((t-t') - \frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c})}{4\pi|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

Retardierte Potentiale

ergeben sich in der Lorenz-Eichung direkt aus der Greenschen Funktion:

SI	Gauß
$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dV' \frac{\rho(\vec{r'}, t - \frac{1}{c}\vert\vec{r}-\vec{r'}\vert)}{\vert\vec{r}-\vec{r'}\vert}$	$\varphi(\vec{r},t) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r'}, t - \frac{1}{c}\vert\vec{r}-\vec{r'}\vert)}{\vert\vec{r}-\vec{r'}\vert}$
$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r'}, t - \frac{1}{c}\vert\vec{r}-\vec{r'}\vert)}{\vert\vec{r}-\vec{r'}\vert}$	$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r'}, t - \frac{1}{c}\vert\vec{r}-\vec{r'}\vert)}{\vert\vec{r}-\vec{r'}\vert}$

Betrachten jetzt oszillierende Ladung und Strom:

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad \text{und} \quad \vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

Oszillierende Ladung und Strom: Nahzone ($|\vec{r}|, |\vec{r'}| \ll \lambda$)

Hier tritt keine Retardierung/Verzögerung auf: Quasistatische Situation

SI	Gauß
$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dV' \frac{\rho(\vec{r'},t)}{\vert\vec{r}-\vec{r'}\vert}$	$\varphi(\vec{r},t) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r'},t)}{\vert\vec{r}-\vec{r'}\vert}$
$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r'},t)}{\vert\vec{r}-\vec{r'}\vert}$	$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r'},t)}{\vert\vec{r}-\vec{r'}\vert}$

Oszillierende Ladung und Strom: Fernzone ($|\vec{r}| \gg \lambda$)

Hier ist die Retardierung nicht mehr vernachlässigbar:

SI	Gauß
$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r}\vec{g}(k\vec{e}_r) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$	$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{rc}\vec{g}(k\vec{e}_r) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$

$$\text{mit} \quad \vec{g}(k\vec{e}_r) := \int dV' \vec{j}_0(\vec{r'})e^{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}}$$

Strahlungsleistung

Im Fernfeld gilt:

SI	Gauß
$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{\mu_0}\langle\vec{E}\times\vec{B}\rangle = \frac{\mu_0 ck^2\vec{e}_r}{32\pi^2 r^2}\vert\vec{e_r}\times\vec{g}\vert^2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$	$\langle\vec{S}\rangle = \frac{c}{4\pi}\langle\vec{E}\times\vec{B}\rangle = \frac{k^2\vec{e}_r}{8\pi cr^2}\vert\vec{e_r}\times\vec{g}\vert^2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$

Für die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel gilt:

SI	Gauß
$\frac{dP}{d\Omega} = \langle\vec{S}\rangle\vec{e}_r r^2 = \frac{\mu_0 ck^2\vec{e}_r}{32\pi^2}\vert\vec{e_r}\times\vec{g}(k\vec{e}_r)\vert^2 + O\left(\frac{1}{r}\right)$	$\frac{dP}{d\Omega} = \langle\vec{S}\rangle\vec{e}_r r^2 = \frac{k^2\vec{e}_r}{8\pi c}\vert\vec{e_r}\times\vec{g}(k\vec{e}_r)\vert^2 + O\left(\frac{1}{r}\right)$

Die gesamte Leistung erhält man durch Integration über den Raumwinkel:

$$P = \int d\Omega \cdot \frac{dP}{d\Omega}$$

Entwickelt man $\vec{g}$ und betrachtet nur den Dipol-Anteil ($\vec{p} = \vec{p}_0 e^{i\omega t}$), erhält man: (Dipol-Fernfeld)

SI	Gauß
$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 c}{4\pi}k^2\frac{e^{ikr}}{r}\vec{e}_r\times\vec{p}_0$	$\vec{B}_0 = k^2\frac{e^{ikr}}{r}\vec{e}_r\times\vec{p}_0$
$\vec{E}_0 = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}k^2\frac{e^{ikr}}{r}\vec{e}_r\times(\vec{e}_r\times\vec{p}_0)$	$\vec{E}_0 = -k^2\frac{e^{ikr}}{r}\vec{e}_r\times(\vec{e}_r\times\vec{p}_0)$

woraus sich letztlich die Strahlungsleistung eines Dipols ergibt: (mit $\theta = \sphericalangle(\vec{e}_r, \vec{p}_0)$)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 c} |p_0|^2 \sin^2\theta \qquad\qquad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |p_0|^2 \sin^2\theta$$

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4}{12\pi c} |\vec{p}_0|^2 \qquad\qquad P = \frac{\omega^4}{3c^3} |\vec{p}_0|^2$$

Hat man diese, so lässt sich der Strahlungswiderstand R_S (einer Antenne mit Amplitude des fließenden Stroms I_0) bestimmen, der gegeben ist durch:

$$P = \frac{1}{2} R_S I_0^2$$

5 Elektrodynamik in Materie

Mittelung

$$\langle F(\vec{r}, t)\rangle = \int dV' F(\vec{r'}, t f(\vec{r} - \vec{r'})$$

$$\text{mit Mittelungsfunktion } f(\vec{r}), \text{ die erfüllt: } \int dV f(\vec{r}) = 1$$

Polarisation

$\vec{P}$ ist die gemittelte Dipolmomentdichte:

$$\vec{P} = \langle \sum_n \vec{p}_n \delta(\vec{r} - \vec{r_n})\rangle$$

Magnetisierung

$\vec{M}$ ist die gemittelte Dichte von magnetischen Dipolen:

$$\vec{M} = \langle \sum_n \vec{m}_n \delta(\vec{r} - \vec{r_n})\rangle$$

mit magnetischem Dipol-Moment eines Moleküls $\vec{m}_n$:

$$\vec{m}_n = \frac{1}{2} \int dV \left[(\vec{r} - \vec{r_n}) \times \vec{j}_n(\vec{r})\right] \qquad\qquad \vec{m}_n = \frac{1}{2c} \int dV \left[(\vec{r} - \vec{r_n}) \times \vec{j}_n(\vec{r})\right]$$

gemittelte Ladungsdichte

$$\langle\rho\rangle = \rho_{\text{frei}} + \langle\rho_{\text{geb}}\rangle = \rho_{\text{frei}} - \vec{\nabla}\vec{P} \quad \Rightarrow \quad \langle\rho_{\text{geb}}\rangle = -\vec{\nabla}\vec{P}$$

gemittelte Stromdichte

$$\langle\vec{j}\rangle = \vec{j}_{\text{frei}} + \langle\vec{j}_{\text{geb}}\rangle$$

$$\langle\vec{j}_{\text{geb}}\rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \qquad\qquad \langle\vec{j}_{\text{geb}}\rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c\vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Für schwache anliegende Felder erhält man näherungsweise eine lineare Antwort:

elektrische Suszeptibilität χ_e

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \qquad\qquad \vec{P} = \chi_e \vec{E}$$

magnetische Suszeptibilität χ_m

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Permittivität ϵ

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e) = \epsilon_0 \epsilon_r \qquad \Big| \qquad \epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$$

Permeabilität μ

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r \qquad \Big| \qquad \mu = 1 + 4\pi\chi_m$$

Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

$$\vec{E}_{1,\parallel} = \vec{E}_{2,\parallel} \quad , \quad \vec{D}_{1,\perp} = \vec{D}_{2,\perp} \quad , \quad \vec{H}_{1,\parallel} = \vec{H}_{2,\parallel} \quad , \quad \vec{B}_{1,\perp} = \vec{B}_{2,\perp}$$

Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \qquad \Big| \qquad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$$

Energiebilanz allgemein

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{S} = -\vec{j}\vec{E} \quad \text{mit räumlicher Energiedichte } w_{em}$$

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} = \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \Big| \qquad \frac{\partial w_{em}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

Energiedichte für lineare Antwort

$$w_{em} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}\right) \qquad \Big| \qquad w_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}\right)$$

5.1 Lorentz-Modell

Gebundene Elektronen werden durch EM-Welle in Bewegung versetzt:

$$m(\ddot{\vec{a}} + \gamma\dot{\vec{a}} + \omega_0^2\vec{a}) = q\vec{E}e^{i(\vec{k}\vec{a} - \omega t)}$$

elektrische Polarisierbarkeit

Zusammenhang zwischen induziertem Dipolmoment und elektrischem Feld am Ort eines Moleküls:

$$\vec{p}_{\text{ind}} = \alpha_e \vec{E}$$

$$\alpha_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \qquad \Big| \qquad \alpha_e = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}$$

elektrische Suszeptibilität

Mit der Teilchendichte n (Gitteratome pro Volumen) erhält man hieraus:

$$\chi_e = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \qquad \Big| \qquad \chi_e = \frac{ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}$$

5.2 Brechungsindex

$$n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} = n_r + i\kappa = |n|e^{i\delta} \qquad \Big| \qquad n = \sqrt{\epsilon\mu} = n_r + i\kappa = |n|e^{i\delta}$$

Betrachten jetzt nur den Fall $\vec{k} = k\vec{e}_k$ mit $k \in \mathbb{C}$

Vektorpotential

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \underbrace{\exp\left[-\frac{\omega\kappa}{c}\vec{e}_k\vec{r}\right]}_{\text{Dämpfung}} \underbrace{\exp\left[i\left(\frac{\omega n_r}{c}\vec{e}_k\vec{r} - \omega t\right)\right]}_{\text{Oszillation}}$$

Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{c}{n_r}$$

Wellenlänge

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n_r} \quad \text{mit Wellenlänge im Vakuum } \lambda_0$$

Zeitverschiebung

für komplexe Brechungsindize ergibt sich eine Verzögerung zwischen E und B-Feld (um $\Delta t = \delta/\omega$):

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{|n|}{c}\vec{e}_k \times \vec{E}(\vec{r}, t - \delta/\omega) \quad \Big| \quad \vec{B}(\vec{r},t) = |n|\vec{e}_k \times \vec{E}(\vec{r}, t - \delta/\omega)$$

Dämpfung: Eindringtiefe

$$d = \frac{c}{\kappa\omega} \overset{\mu_r \approx 1}{\approx} \frac{c}{\omega \mathrm{Im}\sqrt{\epsilon_r}} \quad \Big| \quad d = \frac{c}{\kappa\omega} \overset{\mu \approx 1}{\approx} \frac{c}{\omega \mathrm{Im}\sqrt{\epsilon}}$$

5.3 Ebene Welle ohne Dämpfung (Brechungsindex reell)

Snellius Gesetz

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$$

Polarisation $\perp$ ($\vec{E} \perp$ Einfallsebene)

$$\frac{E_{T0}}{E_{E0}} = \frac{2n_1\cos\alpha_1}{n_1\cos\alpha_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\alpha_2} \overset{\mu\approx 1}{\approx} \frac{2n_1\cos\alpha_1}{n_1\cos\alpha_1 + n_2\cos\alpha_2}$$

$$\frac{E_{R0}}{E_{E0}} = \frac{n_1\cos\alpha_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\alpha_2}{n_1\cos\alpha_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\alpha_2} \overset{\mu\approx 1}{\approx} \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

Reflexionskoeffizient

$$R = \frac{|S_{R,z}|}{|S_{E,z}|} = \frac{|\vec{E}_R|^2}{|\vec{E}_E|^2} \approx \frac{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

Transmissionskoeffizient

$$T = \frac{|S_{T,z}|}{|S_{E,z}|} = \frac{n_2\cos\alpha_2|\vec{E}_T|^2}{n_1\cos\alpha_1|\vec{E}_E|^2} = 1 - R$$

Polarisation $\parallel$ ($\vec{E} \parallel$ Einfallsebene)

$$\frac{E_{T0}}{E_{E0}} \overset{\mu\approx 1}{\approx} \frac{n_1}{n_2}\left(1 + \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)}\right)$$

$$\frac{E_{R0}}{E_{E0}} \overset{\mu\approx 1}{\approx} \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Reflexions- und Transmissionskoeffizient

$$R = 1 - T = \frac{|S_{R,z}|}{|S_{E,z}|} = \frac{|\vec{E}_R|^2}{|\vec{E}_E|^2} \approx \frac{\tan^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan^2(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

5.4 Drude-Lorentz-Modell

$$m(\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}}) = -e\vec{E}$$

Relaxationszeit (mittlere Stoßzeit)

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

Drude-Leitfähigkeit

mit Ladungsträgerdichte n:

$$\sigma_D = \frac{ne^2\tau}{m}$$

Leitfähigkeit

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_D}{1 - i\omega\tau}$$

Plasmafrequenz

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}} \qquad \Bigg| \qquad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}}$$

Dielektrische Funktion

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\text{geb}} - \frac{\sigma(\omega)}{i\omega\epsilon_0} = \epsilon_{\text{geb}} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)} \qquad \Bigg| \qquad \epsilon(\omega) = \epsilon_{\text{geb}} - \frac{4\pi\sigma(\omega)}{i\omega} = \epsilon_{\text{geb}} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)}$$

Häufig ist dabei der Anteil der im Atom gebundenen Ladungsträger $\epsilon_{\text{geb}} \approx 1$

Plasma-Wellen

$$\vec{A} = 0 \quad (\text{d.h. } \vec{B} = 0)$$
$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_p t)}$$
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -i\varphi_0\vec{k}e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_p t)}$$

Longitudinale Welle der Ladungsdichte

6 Spezielle Relativitätstheorie

Galilei-Transformation (d.h. nicht relativistisch)

Das Inertialsystem (IS) K' bewegt sich relativ zu K mit konst. Geschwindigkeit $\vec{v}$:

$$t' = t \quad , \quad \vec{r'} = \vec{r} - \vec{v}t$$

Postulate von Einstein

- Physikalische Gesetze in allen IS identisch
- Lichtgeschwindigkeit in allen IS identisch und unabhängig von der Richtung

Lorentz-Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Lorentz-Transformation

IS K' bewegt sich relativ zu K mit Geschwindigkeit v in x-Richtung, zum Zeitpunkt $t = 0$ lagen die Ursprünge der Systeme aufeinander, sie sind zudem gleich orientiert (bzgl. ihrer Achsen)

$$x' = \gamma(x - vt) \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad , \quad t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})$$

Rücktransformation

Gleiche Bedingungen wie oben, jetzt Transformation von K' nach K

$$x = \gamma(x' + vt') \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z' \quad , \quad t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2})$$

Eigenzeit

$$\tau = \int_0^t dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \overset{\text{für } v=\text{const.}}{=} \frac{t}{\gamma}$$

Addition von Geschwindigkeiten

Objekt bewegt sich in K' mit Geschwindigkeit $\vec{u'}$. Dann gilt für die Geschwindigkeit $\vec{u}$ in K:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \quad , \quad u_y = \frac{u'_y/\gamma}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \quad , \quad u_z = \frac{u'_z/\gamma}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

Und die Rücktransformation analog:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \quad , \quad u'_y = \frac{u_y/\gamma}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \quad , \quad u'_z = \frac{u_z/\gamma}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

Kontravarianter Vierer-Vektor

$$X^\mu = (ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z)$$

Kovarianter Vierer-Vektor

$$X_\mu = (ct, -\vec{r}) = (ct, -x, -y, -z)$$

Vierer-Abstand

$$S^2 = X_\mu X^\mu = X^\mu X_\mu = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t^2 - |\vec{r}|^2$$

Summenkonvention

Über gleiche Indizes, die oben und unten vorkommen, wird summiert:

$$X_\mu X^\mu = \sum_\mu X_\mu X^\mu$$

metrischer Tensor

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) =: g$$

Lorentz-Gruppe $O(3,1)$

$$\Lambda \in O(3,1) \iff \Lambda^T g \Lambda = g$$

Eigentliche Lorentz-Gruppe $SO(3,1) \subset O(3,1)$

$$\Lambda \in SO(3,1) \iff \Lambda \in O(3,1) \text{ und } \det \Lambda = 1$$

Eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe

Hier gilt zusätzlich zu $\Lambda \in SO(3,1)$ noch: ${\Lambda^0}_0 > 0$, d.h. die Richtung der Zeit bleibt erhalten.

Lorentz-Boost (wie obige Lorentz-Transformation)

$$ {\Lambda^\mu}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Rotation

z.B. um die z-Achse mit Drehwinkel α

$$ {\Lambda^\mu}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Tensor N-ter Stufe $T^{\alpha_1 \dots \alpha_N}$

$$\text{erfüllt:} \quad T'^{\beta_1\beta_2\dots\beta_N} = {\Lambda^{\beta_1}}_{\alpha_1}{\Lambda^{\beta_2}}_{\alpha_2}\dots{\Lambda^{\beta_N}}_{\alpha_N} T^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_N}$$
$$\text{mit} \quad {\Lambda^{\beta_i}}_{\alpha_i} \in O(3,1), \beta_i \in \{0,1,2,3\} \quad \forall i \in \{1,2,\dots,N\}$$

Inverses Element

$$\Lambda^{-1} = \bar{\Lambda}^T \quad \text{da} \quad \Lambda^T\bar{\Lambda} = \mathbb{1} \quad \text{mit} \quad \bar{\Lambda} = \Lambda_\alpha^{\ \beta} = g_{\alpha\mu}g^{\beta\nu}{\Lambda^\mu}_\nu$$

Vierer-Gradient

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial X_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

d'Alembert-Operator

$$\Box = -\partial^\alpha\partial_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Vierer-Geschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \gamma\left(c, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

Vierer-Strom

$$j^\mu = \left(c\rho, \vec{j}\right)$$

Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$$

Vierer-Potential

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c}\varphi, \vec{A}\right)$$

$$A^\mu = \left(\varphi, \vec{A}\right)$$

Lorenz-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Inhomogene Maxwell-Gleichungen

$$\Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu$$

$$\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

Elektromagnetischer Feldtensor

ist ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Dualer elektromagnetischer Feldstärketensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \qquad \text{mit Levi-Civita-Symbol (s.u.)}$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Levi-Civita-Symbol (allgemein)

$$\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ gerade Permutation von } (0, 1, \dots, n-1) \\ -1 & \text{falls } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ ungerade Permutation von } (0, 1, \dots, n-1) \\ 0 & \text{sonst, d.h. mind. zwei Indizes sind identisch} \end{cases}$$

Homogene Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

Elektromagnetische Feld-Transformationen

$$\begin{aligned} \vec{E}'_\parallel &= \vec{E}_\parallel \\ \vec{E}'_\perp &= \gamma\left(\vec{E}_\perp + \vec{v} \times \vec{B}_\perp\right) \\ \vec{B}'_\parallel &= \vec{B}_\parallel \\ \vec{B}'_\perp &= \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}_\perp\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}'_\parallel &= \vec{E}_\parallel \\ \vec{E}'_\perp &= \gamma\left(\vec{E}_\perp + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}_\perp\right) \\ \vec{B}'_\parallel &= \vec{B}_\parallel \\ \vec{B}'_\perp &= \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{E}_\perp\right) \end{aligned}$$

Vierer-Wellenvektor

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$$

7 Relativistische Mechanik

Wirkung

$$S = \int dtL$$

Lagrange-Funktion

$$L(\vec{r}, \vec{v}, t) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{mc^2}{\gamma}$$

(Kinematischer) Impuls

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \gamma m\vec{v}$$

Energie

$$E = \vec{p}\vec{v} - L = \gamma mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}}$$

Vierer-Impuls

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = mu^\mu$$

7.1 Geladenes Teilchen im Elektromagnetischen Feld

Vierer-Kraft

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma\frac{dp^\mu}{dt}$$

$$f^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu = q\left(\frac{1}{c}\vec{E}\vec{v}, \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad \Bigg| \qquad f^\mu = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu = q\left(\frac{1}{c}\vec{E}\vec{v}, \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Lagrange-Funktion

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} - q\varphi + q\vec{A}\vec{v} \qquad \Bigg| \qquad L = -\frac{mc^2}{\gamma} - q\varphi + \frac{q}{c}\vec{A}\vec{v}$$

Kanonischer Impuls

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}$$

$$\vec{P} = \vec{p} + q\vec{A} \qquad \Bigg| \qquad \vec{P} = \vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}$$

Energie

$$E = \vec{P}\vec{v} - L = \gamma mc^2 + q\varphi = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} + q\varphi$$

Hamilton-Funktion (entspricht i.d.R. der Energie des Systems)

$$H(\vec{P}, \vec{r}, t) = \sqrt{m^2c^4 + c^2(\vec{P} - q\vec{A})^2} + q\varphi \qquad \Bigg| \qquad H(\vec{P}, \vec{r}, t) = \sqrt{m^2c^4 + c^2(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A})^2} + q\varphi$$

8 Nützliches

$$\Delta_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'})$$
$$\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$$

"Biot-Savart-Integral"

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)^{3/2}} = \frac{x}{a\sqrt{x^2+a}}$$

Quellfreie Stromdichte (wg. $\vec{\nabla}\vec{j}=0$)

$$\int dV(x_i j_j + j_i x_j) = 0 \quad \text{für alle } i,j$$

8.1 Aus früheren Semestern [SI]

$$\text{Drehimpuls } L = \vec{r}\times\vec{p}$$
$$\text{Drehmoment } \vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$$
$$\text{Kapazität } C = Q/U$$

8.2 Koordinatensysteme

Kugelkoordinaten

$$x = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\phi$$
$$y = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\phi$$
$$z = r\cdot\cos\theta$$

$$dV = r^2\sin\theta\cdot dr\cdot d\theta\cdot d\phi$$
$$dA = r^2\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\phi$$
$$d\Omega = \sin\theta\cdot d\theta\cdot d\phi$$

$(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\phi)$ bildet ein Rechts-System

$$\vec{\nabla}f = \vec{e}_r\frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \vec{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}$$
$$\vec{\nabla}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\phi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right)\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\phi$$

Entwicklung in Kugelflächenfunktionen

$$\varphi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}\right]Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$\text{mit Kugelflächenfunktionen} \quad Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

$$\text{und zugeordneten Legendre-Polynomen} \quad P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$$

Für Funktionen $g(\theta, \phi)$ ohne r-Abhängigkeit gilt sogar:

$$g(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} C_{lm} Y_{lm}(\theta,\phi) \quad \text{mit} \quad C_{lm} = \int d\Omega \cdot g(\theta,\phi) Y_{lm}^*(\theta,\phi)$$

Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\phi \\ y &= r \cdot \sin\phi \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dV &= r \cdot dr \cdot d\phi \cdot dz \\ dA &= r \cdot d\phi \cdot dz \end{aligned}$$

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ bildet ein Rechts-System

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &= \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \\ \vec{\nabla} \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\phi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

8.3 Vektor-Identitäten

Kettenregel und Operator-Identitäten

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left(f \vec{A} \right) &= \vec{A} \cdot \left(\vec{\nabla} f \right) + f \left(\vec{\nabla} \vec{A} \right) \\ \vec{\nabla} \times \left(f \vec{A} \right) &= f \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) - \vec{A} \times \left(\vec{\nabla} f \right) \\ \vec{\nabla} \left(\vec{A} \times \vec{B} \right) &= \vec{B} \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) - \vec{A} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \\ \vec{\nabla} \times \left(\vec{A} \times \vec{B} \right) &= \left(\vec{B} \vec{\nabla} \right) \vec{A} - \left(\vec{A} \vec{\nabla} \right) \vec{B} + \vec{A} \left(\vec{\nabla} \vec{B} \right) - \vec{B} \left(\vec{\nabla} \vec{A} \right) \\ \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) &= \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \vec{A} \right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \\ \vec{\nabla}^2 (fg) &= \Delta (fg) = f \Delta g + 2 \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g + g \Delta f \end{aligned}$$

BAC-CAB und mehr

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) &= \vec{B} \left(\vec{A} \vec{C} \right) - \vec{C} \left(\vec{A} \vec{B} \right) \\ \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) &= -\vec{B} \times \left(\vec{C} \times \vec{A} \right) - \vec{C} \times \left(\vec{A} \times \vec{B} \right) \end{aligned}$$

8.4 Fourier-Transformation

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\vec{k}) &= \int d^3 r f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} \\ f(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} \end{aligned}$$

Orthogonalitätsbeziehung

$$\int d^3 r e^{-i\vec{k}\vec{r}} = (2\pi)^3 \cdot \delta(\vec{k}) \quad , \quad \int d^3 k e^{i\vec{k}\vec{r}} = (2\pi)^3 \cdot \delta(\vec{r})$$

8.5 Trigonometrie

ϕ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\phi$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\phi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan\phi$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad , \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \quad , \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \\
\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad , \quad \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad , \quad \cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2} \\
\sin x \sin y &= \frac{1}{2} \left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right) \quad , \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2} \left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right) \\
\sin x \cos y &= \frac{1}{2} \left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right) \quad ,
\end{aligned}$$

8.6 Konstanten

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{A^2 s^4}{kgm^3}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{N}{A^2}$$

$c = 2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$	$c = 2,998 \cdot 10^1 0 \frac{cm}{s}$
$e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$	$e = 4,803 \cdot 10^{-10} Fr$ (Franklin)
$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} kg$	$m_e = 9,109 \cdot 10^{-28} g$
$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} kg$	$m_p = 1,673 \cdot 10^{-24} g$
$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2}$	$G = 6,674 \cdot 10^{-8} \frac{cm^3}{gs^2}$