Theorie C f. Lehramtskandidaten (WS 2004/05)

Musterlösung Übungsblatt **1** 26.10.04

1 **a)** Gradient: $\nabla\varphi(\mathbf{r})$ für:

$$\varphi(\mathbf{r}) = x\sin(yz) \;:\quad \nabla\varphi = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} x\,\sin(yz) = \begin{pmatrix}\sin(yz)\\ x\cos(yz)z\\ x\cos(yz)y\end{pmatrix}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{ar} \;:\quad \nabla\varphi = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}[\,a_x x + a_y y + a_z z\,] = \begin{pmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{pmatrix} = \mathbf{a}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = f(r) \;:\quad \nabla\varphi = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} f(r) = \begin{pmatrix}\partial_x f(r)\\ \partial_y f(r)\\ \partial_z f(r)\end{pmatrix} \;,\quad \partial_x f(r) = \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}(\partial_x r) \;,$$

$$\partial_x r = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{\sqrt{\cdots}} = \frac{x}{r} \quad\Rightarrow\quad \nabla f(r) = \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

b) Divergenz: $\nabla\mathbf{A}(\mathbf{r})$ für:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \alpha\,\mathbf{r} \;:\quad \nabla(\alpha\,\mathbf{r}) = \alpha\nabla\mathbf{r} = \alpha\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \alpha[\,1+1+1\,] = 3\alpha$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}r \;:\quad \nabla(\mathbf{a}r) = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_x r\\ a_y r\\ a_z r\end{pmatrix} = a_x\frac{x}{r} + a_y\frac{y}{r} + a_z\frac{z}{r} = \frac{1}{r}(\mathbf{ar})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\times\mathbf{r} \;:\quad \nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_y z - a_z y\\ a_z x - a_x z\\ a_x y - a_y x\end{pmatrix} = 0+0+0 = 0$$

c) Rotation: $\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r})$ für:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (y,-x,0) \;:\quad \nabla\times\mathbf{A} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y\\ -x\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_z x\\ \partial_z y\\ -\partial_x x - \partial_y y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\times\mathbf{r} \;:\quad \nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_y z - a_z y\\ a_z x - a_x z\\ a_x y - a_y x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_x - (-a_x)\\ a_y - (-a_y)\\ a_z - (-a_z)\end{pmatrix} = 2\mathbf{a}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r} \;:\; \nabla \times (f(r)\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f\,x \\ f\,y \\ f\,z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_y f)z - (\partial_z f)y \\ (\partial_z f)x - (\partial_x f)z \\ (\partial_x f)y - (\partial_y f)x \end{pmatrix} = \frac{f'(r)}{r} \begin{pmatrix} yz - zy \\ zx - xz \\ xy - yx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_x\varphi \\ \partial_y\varphi \\ \partial_z\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y\partial_z\varphi - \partial_z\partial_y\varphi \\ \partial_z\partial_x\varphi - \partial_x\partial_z\varphi \\ \partial_x\partial_y\varphi - \partial_y\partial_x\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

falls die gemischten 2. Ableitungen vertauschen: z.B.: $\partial_x\partial_y\varphi \equiv \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}$

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \times \mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix} \\ &= \partial_x\partial_y A_z - \partial_x\partial_z A_y + \partial_y\partial_z A_x - \partial_y\partial_x A_z + \partial_z\partial_x A_y - \partial_z\partial_y A_x = 0 \end{aligned}$$

falls die gemischten 2. Ableitungen vertauschen.

$$\nabla(\nabla\varphi) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x\varphi \\ \partial_y\varphi \\ \partial_z\varphi \end{pmatrix} = \partial_x^2\varphi + \partial_y^2\varphi + \partial_z^2\varphi \equiv \Delta\varphi$$

$\boxed{2}$ **a)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon} \underbrace{\left[\sqrt{\pi}\varepsilon\right]}_{\text{Bronstein}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 1 = 1$$

Dies ist nur ein Spezialfall der eigentlichen Definition der "δ-Funktion":

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a)\,\delta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} f(\xi_\varepsilon + a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} f(\xi_\varepsilon + a) = f(a)$$

Hier wurde der sog. "2. Mittelwertsatz der Integralrechnung" angewendet: der Punkt ξ_ε ist nicht genau bekannt und hängt von ε ab. Aber es ist klar, daß ξ_ε ungefähr im Intervall $-\varepsilon < \xi_\varepsilon < \varepsilon$ liegen muß, also für $\varepsilon \to 0$ auch $\xi_\varepsilon \to 0$ geht.

b)

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,\delta(x-y)\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-y} & \text{für} \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad y < 0 \end{array} \right\} = e^{-y}\,\Theta(y)$$

$\boxed{3}$ **a)** Parametrisieren des Weges:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_a + (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a)\,t = \mathbf{b}\,t \;\;,\quad 0 \le t \le 1 \;\;,\quad \mathrm{d}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{b}\,\mathrm{d}t$$

und einsetzen:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\mathbf{b}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix} x \\ z^2/2 \\ yz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix} b_x t \\ b_z^2 t^2/2 \\ b_y b_z t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}t\,[\, b_x^2 t + \frac{1}{2} b_y b_z^2 t^2 + b_y b_z^2 t^2 \,] = \frac{1}{2}[\, b_x^2 + b_y b_z^2 \,] \end{aligned}$$

b) Hat $\mathbf{F}$ ein Potential?

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ z^2/2 \\ yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

also ja. Es existiert also ein $\varphi(\mathbf{r})$ mit $\mathbf{F} = \nabla\varphi$. Da die Arbeit nun wegunabhängig ist, ist das Potential gegeben durch

$$\varphi(\mathbf{r}) = W(b,a)|_{\mathbf{b}=\mathbf{r}} + const. = \frac{1}{2}[\, x^2 + yz^2 \,] + const.$$

Test durch Einsetzen:

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2x \\ z^2 \\ 2yz \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

$\boxed{4}$ **a)** Zylinder: $\mathrm{d}^3 r = \rho \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}z$ Kugel: $\mathrm{d}^3 r = r^2 \mathrm{d}r\, \sin(\theta)\mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi$
Volumen des Zylinders:

$$\begin{aligned} \text{Zylinderkoord.:}\quad V &= \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^R \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \;= 2\pi h \frac{R^2}{2} = \pi R^2\, h \\ \text{Kartes. Koord.:}\quad V &= \int_0^h \mathrm{d}z \int_{-R}^R \mathrm{d}x \int_{y_0}^{y_0} \mathrm{d}y \;\;,\quad y_0 = \sqrt{R^2 - x^2} \\ &= h \int_{-R}^R (2y_0)\mathrm{d}x = 4h \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{4h\,\frac{1}{2}\,[\, x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \arcsin(x/R)\,]\Big|_{x=0}^{x=R}}_{\text{Bronstein}} = 2hR^2 \arcsin(1) = \pi R^2\, h \end{aligned}$$

b) Kugelkoord.:

$$Q = \int_0^\infty r^2\,\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\rho(r) = 4\pi \int_0^\infty r^2\,\rho(r)\,\mathrm{d}r = 4\pi a R^6 \int_0^\infty \frac{r^2\,\mathrm{d}r}{R^6 + r^6}$$

Substitution: $u = r^3$, $\mathrm{d}u = 3r^2\,\mathrm{d}r$,

$$Q = 4\pi a R^6 \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{R^6 + u^2} = \frac{2\pi^2}{3} a R^3$$