Theorie C f. Lehramtskandidaten (WS 2004/05)

Musterlösung Übungsblatt **2** 03.11.04

$\boxed{1}$ **a)** Fluß: $\Phi = \int \mathbf{A}(\mathbf{r})\mathbf{n}\,\mathrm{d}a$

Betrachte die Würfelfläche || zur y-z-Ebene:

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_x \quad , \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{A}\mathbf{n} = A_x = x = \frac{L}{2}$$

Der Beitrag zu Φ ist damit

$$\int \mathrm{d}a\,\frac{L}{2} = \frac{L}{2}(L)^2 = \frac{1}{2}L^3$$

Die 5 anderen Würfelflächen liefern denselben Beitrag, also ist

$$\Phi = 3L^3 = 3 \cdot \text{Volumen}$$

b) Koordinaten auf der Kugeloberfläche, Radius R:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} R\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ R\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ R\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{d}a = R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Fluß: $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$, auf der Oberfläche: $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = R\mathbf{n}$,

$$\Phi = \int_F R(\mathbf{n}\mathbf{n})\,\mathrm{d}a = R\underbrace{\int_F \mathrm{d}a}_{4\pi R^2} = 4\pi R^3 = 3\cdot\frac{4\pi}{3}R^3 = 3\cdot\text{Volumen}$$

wie bei dem Würfel. Das Ergebnis ist von der Form der geschlossenen Oberfläche unabhängig, siehe **d)**.

c) Alles wie in **b)**, aber $0 \le \theta < \pi/2$ (Halbkugel) und

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2yz \\ -z^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\text{Kugelob.}} = \begin{pmatrix} 2R\,n_x \\ 2R^2\,n_y n_z \\ -R^2\,n_z^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

damit wird der Fluß

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \mathrm{d}a\,[\,2R(n_x)^2 + 2R^2(n_y)^2 n_z - R^2(n_z)^3\,] \quad , \quad \mathrm{d}a = R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= R\int \mathrm{d}a\,[\,2\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) + 2R\cos(\theta)\{\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) - \frac{1}{2}\cos^2(\theta)\}\,] \end{aligned}$$

Erstmal die φ-Integrale ausführen:

$$\int \mathrm{d}a = R^2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \, \sin(\theta) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \ ,$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \cos^2(\varphi) = \pi \ , \quad \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \sin^2(\varphi) = \pi \ , \quad \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi$$

Mit $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$ ergibt sich jetzt

$$\begin{aligned}
\Phi &= 2\pi R^3 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \, \sin(\theta) \, [\, 1 - \cos^2(\theta) + R\{\cos(\theta) - 2\cos^3(\theta)\}\,] \\
&= 2\pi R^3 \int_0^1 \mathrm{d}x \, [\, 1 - x^2 + R(x - 2x^3)\,] \ , \quad x = \cos(\theta) \ , \quad \mathrm{d}x = -\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&\Rightarrow \quad \boxed{\Phi = \frac{4\pi}{3} R^3}
\end{aligned}$$

Zum Vergleich können wir noch den Fluß durch die *untere* Halbkugel ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi} &= 2\pi R^3 \int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}\theta \, \sin(\theta) \, [\, 1 - \cos^2(\theta) + R\{\cos(\theta) - 2\cos^3(\theta)\}\,] \\
&= 2\pi R^3 \int_{-1}^0 \mathrm{d}x \, [\, 1 - x^2 + R(x - 2x^3)\,] \ , \quad x = \cos(\theta) \ , \quad \mathrm{d}x = -\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4\pi}{3} R^3
\end{aligned}$$

Der Fluß durch die Vollkugel ergibt sich also, der Vollständigkeit halber:

$$\Phi_{tot} = \Phi + \widetilde{\Phi} = 2\frac{4\pi}{3} R^3 = 2 \cdot \text{Volumen}$$

Offenbar ist der Fluß ϕ_z durch die Kreisscheibe bei $z = 0$ mit Radius R gleich $\phi_z = 0$. In der Tat, denn der Normalenvektor ist jetzt $\mathbf{n} = (0,0,1)$ und $\mathbf{A} = (2x, 0, 0)$, also $\mathbf{nA} = 0$ und damit $\phi_z = 0$.

<u>**d)**</u> Gauß: $\int_{\partial V} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) \, \mathrm{d}^3 r$

Für **a)** und **b)** gilt: $\mathbf{A} = \mathbf{r}$, also $\nabla\mathbf{A} = 3$, also $\Phi = 3 \int_V \mathrm{d}^3 r = 3 \cdot \text{Volumen}$. Dies unabhängig von der Form der Oberfläche bzw. Volumen!

Für **c)** erhält man auch eine konstante Divergenz, $\nabla\mathbf{A} = 2$, und somit für den Fluß durch die Halbkugel inklusive Kreisscheibe bei $z = 0$: $\Phi = 2 \cdot \text{Volumen} = 2 \cdot (\frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}R^3) = \frac{4\pi}{3}R^3$. Allerdings war nach der offenen Halbkugel gefragt, und dafür ist Gauß nicht anwendbar! Gauß gilt nur für geschlossene Oberflächen! Man muß also extra $\phi_z = 0$ zeigen, um Gauß verwenden zu können.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Gaußsches Gesetz (ohne ' nach dem ß): Folgt durch Anwendung des Gaußschen Satzes auf die Maxwell-Gleichung,

$$\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} q \ , \quad q = \int_V \rho(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}^3 r$$

a) Symmetrie: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\,\mathbf{e}_r\,, \mathbf{e}_r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ = radialer Einheitsvektor. Bei gegebenem r ist

V = Kugel mit Radius r , ∂V = Oberfläche dieser Kugel mit $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$

Also:

$$\int_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{a} = E(r) \int_{\partial V} \mathrm{d}a = E(r)\,4\pi r^2$$

Die in V enthaltene Ladung hängt von r ab:

$r > R$: q =Gesamtladung der Kugel, $q = Q$, also ist $\boxed{E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}}$

Dies entspricht dem Ergebnis für eine Punktladung und gilt für jede kugelsymmetrische Ladungsdichte, für r außerhalb der Ladung.

$r < R$: q = Ladung im Volumen mit Radius r, also

$$q = \int_{r' \leq r} \rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3 r' = \rho_0\,\frac{4\pi}{3} r^3\,, \rho_0 = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}\,,$$

also ist $q = Q(r/R)^3$, und damit $\boxed{E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}}$

b) Selbe Taktik und Symmetrie wie **a)**, $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\,\mathbf{e}_r$,

$$\begin{aligned} r < R_< &: \quad E(r) = 0 \\ R_< < r < R_> &: \quad E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \\ R_> < r &: \quad E(r) = \frac{q + (-q)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = 0 \end{aligned}$$

c) Symmetrie: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(x)\,\mathbf{e}_x$ und $E(-x) = -E(x)$. Betrachte Ausschnitt der y-z-Ebene mit Fläche A. Bei gegebenem x ist dann das Volumen, durch das der Fluß berechnet werden muß, gegeben durch eine Platte mit Ausdehnung A und Stärke $2|x|$, die in x-Richtung symmetrisch ist (eine Skizze würde hier helfen). Zum Fluß tragen nur die beiden Flächen A bei, da $\mathbf{E}||\mathbf{e}_x$, und beide Flächen A liefern den gleichen Beitrag, wegen $E(-x) = -E(x)$:

$$\int_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{n}\,\mathrm{d}a = 2\,|E(x)| \int_A \mathrm{d}a = 2\,|E(x)|\,A = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

Die eingeschlossene Ladung q hängt von $|x|$ ab:

$$|x| > L: \quad q = Q = A(2L)\rho_0 \quad , \quad 2|E(x)|A = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} A2L \quad , \quad \boxed{E(x) = \frac{\rho_0\,L}{\varepsilon_0}\mathrm{sgn}(x)}$$

$$|x| < L: \quad q = A\,(2|x|)\,\rho_0 \quad , \quad 2|E(x)|A = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} A2|x| \quad , \quad \boxed{E(x) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} x}$$

d) Am einfachsten ist wohl: Raten und mit dem Nabla in Kugelkoordinaten überprüfen. Da das E-Feld nur eine radiale Komponente hat und auch nur von r abhängt, wird das Potential nur von r abhängen (auch intuitiv klar), $\phi(\mathbf{r}) = \phi(r)$. Die r-Komponente des Nabla lautet (aus nem Buch) $\nabla_r = \partial_r$, also muß gelten

$$E(r) = -\frac{\partial}{\partial r}\phi(r)$$

Dies wird gelöst durch

$$\phi(r) = \begin{cases} r > R \;:\; \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} + K_> \\ r < R \;:\; -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r^2}{2R^3} + K_< \end{cases}$$

Die Integrationskonstanten $K_>$, $K_<$ bestimmt man so, daß $\phi(r)$ überall stetig ist, und das $\phi(r \to \infty) = 0$. Letzteres ist eine reine Konvention für den Energienullpunkt. Also:

$$\phi(r \to \infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_> = 0 \;,$$

$$\phi(r = R) = \text{stetig} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R} + K_< \quad \Rightarrow \quad K_< = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{2R}$$

Also lautet das Potential:

$$\phi(r) = \begin{cases} r > R \;:\; \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} \\ r < R \;:\; \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R}[\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{r^2}{R^2}] \end{cases}$$

Die obere Zeile entspricht natürlich (wie beim E-Feld) der Punktladung.

3 **a)** Symmetrie:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(x)\,\mathbf{e}_x \quad \Rightarrow \quad \nabla\mathbf{E} = \partial_x E(x) \quad \Rightarrow \quad \text{Maxwell: } \frac{\partial}{\partial x}E(x) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x)$$

$$x > L : \quad \rho(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad E(x) = const. = E_0$$

$$0 \le x < L : \quad \rho(x) = \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \partial_x E(x) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(x) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}x + E_1$$

Randbedingungen:

$$E(L_-) = E(L_+) \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}L + E_1$$

Und: Symmetrie $E(-x) = -E(x)$ verlangt $E(0) = 0$, was durch $E_1 = 0$ eingebaut wird. Also ist

$$E(x) = \begin{cases} x > L & : \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0} L \\ 0 \leq x < L & : \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0} x \end{cases}$$

b) Das E-Feld ist nur dann eine Lösung der Maxwell-Gleichung, wenn auch die Rotation verschwindet:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{O.K.}$$

4 Zylinderkoordinaten:

$$x' = r' \cos(\varphi') \quad , \quad y' = r' \sin(\varphi') \quad , \quad z' = z' \quad , \quad \mathrm{d}^3 r' = r' \, \mathrm{d}r' \, \mathrm{d}\varphi' \, \mathrm{d}z'$$

Für $\mathbf{r}$ auf der z-Achse ist der Abstand von $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ gegeben durch

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z - z')^2} = \sqrt{(r')^2 [\sin^2(\varphi') + \cos^2(\varphi')] + (z - z')^2} = \sqrt{(z - z')^2 + (r')^2}$$

und das Potential lautet

$$\phi(r, \varphi, z) = \phi(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty r' \, \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}z' \, \frac{\rho_0 \, \delta(z') \, \delta(r' - R)}{\sqrt{(z - z')^2 + (r')^2}} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$