UNIVERSITÄT KARLSRUHE WS 2004/2005
INSTITUT FÜR THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK
INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE
Dr. Robert Harlander, Dr. Jan Brinckmann **03.11.04**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre robert.harlander@cern.ch janbri@tkm.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 3 zur Theorie C für Lehramtskandidaten

1 Greensche Funktionen sind Lösungen der Gleichung $\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$.
[Schreiben Sie einmal $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ explizit an, für kartesische, Zylinder- und Kugelkoordinaten.]
Im Folgenden betrachten wir ein Volumen V bzw. dessen Oberfläche (Rand) ∂V.
Zeigen Sie, daß für die Greensche Funktion gilt:

$$\int_{\partial V} \nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\mathbf{a} \equiv \int_{\partial V} (\mathbf{n}\cdot\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\,\mathrm{d}a = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbf{r}'\in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß das Potential $\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3r' + \phi_0$ eine Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r})$ darstellt ($\mathbf{r}\in V$).
Was folgt für $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ im Fall einer Punktladung am Ort $\mathbf{R}\in V$: $\rho(\mathbf{r}) = Q\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R})$?

2 Dirichlet-Problem: Elektron in einer Kavität:
In einem geerdeten Metallblock befinde sich eine Hohlkugel V mit Radius R, die Randbedingung für das Potential $\phi(\mathbf{r})$ innerhalb V lautet also $\phi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}\in\partial V} = 0$.
Was folgt daraus für das E-Feld auf der Oberfläche ∂V? Wie verlaufen die Feldlinien dort?
Bestimmen Sie $\phi(\mathbf{r})$ einer Punktladung Q am Ort $\mathbf{r}'$ für $\mathbf{r},\mathbf{r}'\in V$. Simulieren Sie die Randbedingung durch eine "Spiegelladung" geeigneter Position und Ladung.
Geben Sie die Greensche Funktion an (vergl. 1 b)).

3 Dirichlet-Problem: Geladene Stange vor Metallblock:
Betrachten Sie einen unendlich ausgedehnten, geerdeten Metallblock im linken Halbraum $x\le 0$. Die Randbedingung für das Potential im Halbraum $x\ge 0$ lautet also $\phi(\mathbf{r})|_{x=0} = 0$.

a) Bestimmen Sie das Potential für eine Punktladung am Ort $\mathbf{r}'$ im Halbraum $x'>0$ über eine geeignete Spiegelladung und daraus die Greensche Funktion $G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')$.

b) Berechnen Sie nun über G_D das Potential einer geladenen Stange der Länge $2L$ im Abstand a zur Oberfläche, d.h., es sei $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0\,\delta(x-a)\,\delta(y)\,\Theta(L-|z|)$.
Ist die Randbedingung erfüllt? Ist $\lim_{x\to\infty}\phi(\mathbf{r}) = 0$?

4 Legendre-Polynome $P_l(x)$ folgen aus der Entwicklung der Greenschen Funktion in Kugelkoordinaten, $r'<r$: $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos(\gamma))$, $\gamma = \sphericalangle(\mathbf{r},\mathbf{r}')$

a) Man gewinne $P_l(x)$ für $l=0,1,2,3$ aus der Entwicklung von $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ für $r'\ll r$.

b) Bestimmen Sie die $P_l(x)$ für $l=0,1,2,3$ aus der Formel von Rodrigues,
$P_l(x) = \frac{1}{2^l\,l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$, und vergleichen Sie mit a) und der Literatur.

c) Überprüfen Sie $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\,P_l(x)\,P_k(x) = \delta_{l,k}\frac{2}{2l+1}$ für $l,k=0,1,2$.

— Besprechung in den Übungsgruppen ab Dienstag, 09.11.04 —