

1 Gauß anwenden und die Definitionsgleichung der Greenschen Funktion einsetzen:

$$\int_{\partial V} d\mathbf{a} \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_V d^3r \nabla \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_V d^3r \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_V d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbf{r}' \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Poisson: $\Delta \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r})$. Δ -Operator auf Potential loslassen:

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') \underbrace{\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}_{=\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

Punktladung: $\rho(\mathbf{r}') = Q \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{R})$. Das einsetzen in die Lösung der Poisson-Gleichung:

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{Q}{\varepsilon_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{R})$$

Das heißt, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ist im Prinzip das Potential einer Punktladung am Ort $\mathbf{r}'$. Wenn man ein Problem für eine Punktladung gelöst hat, kennt man die Greensche Funktion, und kann damit das Potential für eine beliebige Ladungsdichte berechnen $\leftrightarrow$ Superpositionsprinzip.

2 Die Punktladung mit Ladung Q befindet sich innerhalb der Hohlkugel bei $\mathbf{r}' = r'\mathbf{n}'$, $r' \leq R$. Die Spiegelladung $\overline{Q}$ muß aus Symmetriegründen in derselben Richtung $\mathbf{n}'$, aber anderer Entfernung $u \geq R$ außerhalb der Hohlkugel angenommen werden, also am Ort $\mathbf{u} = u\mathbf{n}'$. Die Ladungen Q und $\overline{Q}$ haben gegensätzliche Vorzeichen, $\overline{Q} = -\alpha Q$, $\alpha > 0$, wenn das Potential auf der Kugeloberfläche = 0 sein soll. Mit dem Beobachtungspunkt $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$, $r \leq R$ lautet dann das Potential

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r}\mathbf{n} - r'\mathbf{n}'|} - \frac{\alpha}{|\mathbf{r}\mathbf{n} - u\mathbf{n}'|} \right]$$

mit $\alpha = -\overline{Q}/Q$, $0 \leq r' \leq R \leq u$, $0 \leq r \leq R$

Zur Wahrung der Randbedingung $\phi(\mathbf{r})|_{r=R} = 0$ muß demzufolge gelten, mit $\cos(\gamma) = \mathbf{n}\mathbf{n}'$,

$$\begin{aligned} |R\mathbf{n} - r'\mathbf{n}'|\alpha &= |R\mathbf{n} - u\mathbf{n}'| \\ [R^2 + (r')^2 - 2Rr'\cos(\gamma)]\alpha^2 &= R^2 + u^2 - 2Ru\cos(\gamma) \\ [R^2(1 - \alpha^2) + u^2 - \alpha^2(r')^2] - 2R\cos(\gamma)[u - r'\alpha^2] &= 0 \end{aligned}$$

Da γ beliebig ist, ist es notwendig, daß der Vorfaktor von $\cos(\gamma)$ verschwindet, also

$$u - r'\alpha^2 = 0 \quad , \quad \alpha^2 = \frac{u}{r'}$$

Dies in den verbleibenden Term ein- und nullsetzen

$$u^2 - u\left(\frac{R^2}{r'} + r'\right) + R^2 = 0 \quad , \quad u = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r'} + r'\right) \pm \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R^2}{r'} + r'\right)^2 - R^2}}_{\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R^2}{r'} - r'\right)^2}} = \begin{cases} R^2/r' \\ r' \end{cases}$$

Die Lösung $u = r'$ macht nur für $r' = R$ Sinn, also ist

$$u = \frac{R^2}{r'} \quad , \quad \alpha^2 = \frac{R^2}{(r')^2} \quad , \quad \alpha = \frac{R}{r'}$$

Grenzfälle: Für $r' \rightarrow 0$ geht der Abstand u der Spiegelladung $\rightarrow \infty$ wie auch deren Ladung $\alpha \rightarrow \infty$. Für $r' \rightarrow R$ geht auch $u \rightarrow R$ mit $\alpha \rightarrow 1$. Beide Fälle sind einsichtig, wenn man sich die Feldlinien veranschaulicht.

Einsetzen der Lösungen für u und α in das Potential und ablesen der Greenschen Funktion über

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{Q}{\varepsilon_0} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad \text{für eine Punktladung } Q \text{ bei } \mathbf{r}'$$

liefert schließlich

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{4\pi} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R}{r' |\mathbf{r} - \frac{R^2}{(r')^2} \mathbf{r}'|} \right]$$

mit $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ und $\mathbf{n}' = \mathbf{r}'/r'$ eingesetzt.

3 a) Wir nehmen mal eine Punktladung Q am Ort $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ im rechten Halbraum an, dann liegt die (hypothetische) Spiegelladung im linken Halbraum, an dem Ort, der sich durch spiegeln von $\mathbf{r}'$ an der y - z -Ebene ergibt. Das Potential am Ort $\mathbf{r} = (x, y, z)$ im rechten Halbraum ist also

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right]$$

Die Greensche Funktion kann man jetzt ablesen:

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right]$$

b) Es gilt

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{x' \geq 0} d^3 r' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}')$$

Um die Randbedingung $\phi(\mathbf{r})|_{x=0} = 0$ zu erfüllen, muß $\phi_0 = 0$ angenommen werden; die Dirichlet-GF genügt der Randbedingung $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{x=0} = 0$.

Einsetzen der Ladungsdichte der Stange,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_0^\infty dx' \int_{-\infty}^\infty dy' \int_{-\infty}^\infty dz' \delta(x' - a) \delta(y') \Theta(L - |z'|) G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_{-L}^L dz' G_D\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ z' \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L}^L dz' \left[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + (z-z')^2}} \right] \end{aligned}$$

Das erste Integral wird mit $K^2 = (x-a)^2 + y^2$ und Bronstein

$$\int_{-L}^L dz' \frac{1}{\sqrt{K^2 + (z-z')^2}} = \int_{-L-z}^{L-z} du \frac{1}{\sqrt{K^2 + u^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 + K^2}| \Big|_{-L-z}^{L-z}$$

Analog für das zweite Integral, und mit $\bar{K}^2 = (x+a)^2 + y^2$ erhält man für das Potential

$$\phi(x, y, z) \Big|_{x \geq 0} = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \left[\ln \left| \frac{(z-L) - \sqrt{(z-L)^2 + K^2}}{(z+L) - \sqrt{(z+L)^2 + K^2}} \right| - \ln \left| \frac{(z-L) - \sqrt{(z-L)^2 + \bar{K}^2}}{(z+L) - \sqrt{(z+L)^2 + \bar{K}^2}} \right| \right]$$

Dies ist offensichtlich das (komplizierte) Potential der Stange, plus dem einer "Spiegelstange". Daß Ladungsverteilung und gespiegelte Ladungsverteilung gleich aussehen, liegt natürlich daran, daß die Spiegelfläche eine simple Ebene ist.

Randbedingung: Für $x = 0$ ist $K^2 = \bar{K}^2$ und damit $\phi = 0$. $\checkmark$

Im Unendlichen: Für $x \rightarrow \infty$ werden K und $\bar{K}$ grösser als alles andere in der obigen Formel, d.h., $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} [\ln(1) - \ln(1)] = 0$. Im Unendlichen verschwindet das Potential, wie schon für eine Punktladung.

Genauer: Wenn man die $\ln ||$ -Ausdrücke für $x \gg L$, also $K \gg L$ und $\bar{K} \gg L$ entwickelt, erhält man (mit $y = z = 0$ der Einfachheit halber)

$$x \gg L : \quad \phi(x, 0, 0) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} 2L \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right]$$

Im Unendlichen sieht die Stange also aus wie eine Punktladung, mit der Gesamtladung der Stange: $Q = \rho_0 2L$. Stichwort: Multipolentwicklung.

4 a)

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}'} \quad , \quad \angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \gamma \quad , \quad \mathbf{r}\mathbf{r}' = rr' \cos(\gamma) \equiv rr' x$$

Für $r' \ll r$ erstmal r aus der Wurzel ziehen,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r \sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2(r'/r)x} = r \sqrt{1 + (y^2 - 2yx)} \quad , \quad y = \frac{r'}{r} \ll 1 \quad , \quad x = \cos(\gamma)$$

Die (...) ist $\ll 1$: $1/\sqrt{\dots}$ entwickeln bis zur 3. Ordnung (Bronstein), dann alle Terme bis $\sim y^3$ sammeln und alle höheren Terme $\sim y^4, \sim y^5, \dots$ wegwerfen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2}(y^2 - 2yx) + \frac{3}{8}(y^2 - 2yx)^2 - \frac{15}{48}(y^2 - 2yx)^3 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2}(y^2 - 2yx) + \frac{3}{8}(4y^2x^2 - 4y^3x + \dots) - \frac{15}{48}(-8y^3x^3 + \dots) \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[y^0 + y^1 x + y^2 \frac{1}{2}(3x^2 - 1) + y^3 \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) + \dots \right] \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der Formel aus dem Aufgabenblatt kann man die ersten Legendre-Polynome ablesen:

$$P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = x \quad , \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad , \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

b) Da muß man nur l einsetzen und ausrechnen ...

c) Die Legendre-Polynome bilden ein Orthonormalsystem auf dem Intervall $-1 \leq x \leq 1$. Damit ist gemeint, daß gilt

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_k(x) = \delta_{l,k} \frac{2}{2l+1}$$

Insbesondere ist das Integral = 0 für $l \neq k$.

Nachrechnen für $l \neq k$ d.h., $(l, k) = (0, 1), (0, 2), (1, 2)$:

$$\begin{aligned} l = 0 : \quad \int_{-1}^1 dx P_k(x) &= \begin{cases} k = 1 : \quad \int_{-1}^1 dx x = 0 \\ k = 2 : \quad \int_{-1}^1 dx \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{1}{2} [x^3 - x]_{-1}^1 = 0 \end{cases} \\ l = 1 : \quad \int_{-1}^1 dx x P_k(x) &= \begin{cases} k = 2 : \quad \int_{-1}^1 dx \frac{1}{2}(3x^3 - x) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nun muß man noch die Normierung bestätigen: $l = k = 0, 1, 2$:

$$\frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 dx P_l(x)^2 = \begin{cases} l=0 : & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx = 1 \\ l=1 : & \frac{3}{2} \int_{-1}^1 dx x^2 = 1 \\ l=2 : & \frac{5}{2} \int_{-1}^1 dx \frac{1}{4}(9x^4 + 1 - 6x^2) = \frac{5}{4} \left[\frac{9}{5} + 1 - 2 \right] = 1 \end{cases}$$