UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK
INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE
Dr. Robert Harlander, Dr. Jan Brinckmann
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre robert.harlander@cern.ch janbri@tkm.uni-karlsruhe.de

WS 2004/2005

10.11.04

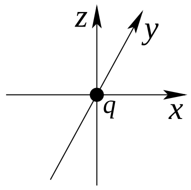
Übungsblatt Nr. 4 zur Theorie C für Lehramtskandidaten

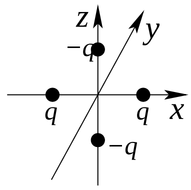
1 Multipolmomente:

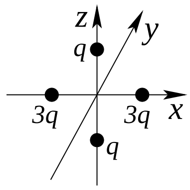
Die kartesischen Mono-, Dipol-, Quadrupolmomente sind gegeben durch

$$Q = \int \mathrm{d}^3r\,\rho(\mathbf{r}) \quad , \quad p_i = \int \mathrm{d}^3r\,\rho(\mathbf{r})\,x_i \quad , \quad Q_{ij} = \int \mathrm{d}^3r\,\rho(\mathbf{r})[\,3\,x_i\,x_j - \delta_{i,j}r^2\,]\,.$$

a) Berechnen Sie Q, p_i, Q_{ij} für die folgenden Anordnungen von Punktladungen.

(i) 

(ii) 

(iii) 

Die Punktladungen in (ii), (iii) haben vom Ursprung den Abstand d.

b) Geben Sie für (i)–(iii) das resultierende Potential $\phi(\mathbf{r})$ an, und skizzieren Sie qualitativ die Feldlinien des E-Feldes in der x-z-Ebene.

2 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten:

Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0$ in Kugelkoordinaten r, θ, φ lautet

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}[\,A_l\,r^l + B_l\,\frac{1}{r^{l+1}}\,]\,P_l(\cos(\theta)) \quad , \quad P_l = \text{Legendre-Polynom},$$

falls $\phi(\mathbf{r})$ nicht von φ abhängt (azimutale Symmetrie). A_l, B_l =Integrationskonstanten.

Gegeben Sei eine beliebig dünnwandige Kugelschale mit Radius R um den Ursprung, die diverse Spannungsgefälle aufweisen kann. Diese gehen als Randbedingung für ϕ ein:

(i) $\phi(R,\theta) = V$, (ii) $\phi(R,\theta) = V\cos(\theta)$, (iii) $\phi(R,\theta) = V[\,2 + \cos(\theta) - 3\sin^2(\theta)]$

Außerdem soll $\phi(r \to \infty) = 0$ erfüllt sein.

a) Drücken Sie $\phi(R,\theta)$ durch Linearkombinationen der $P_l\,, l = 0, 1, 2, \ldots$ aus.

b) Es sei $r \geq R$: Man bestimme die A_l , B_l aus den Randbedingungen für (i)–(iii) .

c) Berechnen Sie die Gesamtladung der Kugelschale über das Gaußsche Gesetz für (i) und (ii) . [Es gilt $E_r(r,\theta) = -\partial_r\phi(r,\theta)$.]

3 Ampèresches Gesetz:

Man benutze $\oint_{\partial F} \mathbf{B}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \mu_0\,I$, $I = \int_F \mathbf{j}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{a}$, um das Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ zu bestimmen,

a) für einen unendlich langen dünnen Draht auf der z-Achse;

b) ein Kabel (Zylinder) mit Radius R um die z-Achse, das homogen vom Strom I durchflossen wird (betrachten Sie $r \geq R$ und $0 \leq r < R$) ;

c) dasselbe Kabel, das nun eine Bohrung mit Radius $R' < R$ um die z-Achse enthält, also $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ für $0 \leq r < R'$. Man betrachte $0 \leq r < R'$, $R' \leq r < R$, $r \geq R$. Der Strom durch das Kabel ist I .

— Besprechung in den Übungsgruppen ab Dienstag, 16.11.04 —