

1 a) Die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ ist hier immer eine Summe von δ -Funktionen. Man muß also nur die Koordinaten der Punktladungen einsetzen und die Beiträge aller Punktladungen (mit richtigem Vorzeichen) zusammenzählen. Dadurch, daß die Ladungen auf den Achsen liegen, ist x_i oftmals 0, so ist z.B. $Q_{ij}|_{i \neq j} = 0$ in allen Fällen (i), (ii), (iii).

Es ergibt sich

	(i)	(ii)	(iii)
Q	q	0	$8q$
p_i	0	0	0
Q_{11}	0	$6qd^2$	$10qd^2$
Q_{22}	0	0	$-8qd^2$
Q_{33}	0	$-6qd^2$	$-2qd^2$
$Q_{ij} _{i \neq j}$	0	0	0

b) Das Potential der Multipolentwicklung lautet

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \sum_{i=1}^3 p_i \frac{x_i}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right]$$

Die Momente von oben einsetzen ergibt

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \begin{array}{ll} \text{(i) :} & \left[\frac{q}{r} \right] \\ \text{(ii) :} & \left[3qd^2 \frac{x^2 - z^2}{r^5} \right] \\ \text{(iii) :} & \left[\frac{8q}{r} + 2qd^2 \frac{5x^2 - 4y^2 - z^2}{r^5} \right] \end{array} \right.$$

Feldlinien: (i) = Punktladung, also zeigt $\mathbf{E}$ radial nach außen (falls $q > 0$).

(ii): $\phi(\mathbf{r}) = \text{const.} = 0$ auf den winkelhalbierenden Ebenen $x = \pm z$ (Spiegelebenen). Dort muß also $\mathbf{E} \perp$ Ebene sein; die Feldlinien laufen geschlossen von $+q$ nach $-q$ und durchschneiden dabei diese Ebenen senkrecht.

(iii): Summe (Superposition) aus (i) und (ii) (läßt sich schlecht zeichnen ...).

2 a) Anhand einer Liste der P_l (z.B. Musterlösung Blatt 3) sieht man recht schnell:

$$(i): \quad \phi(R, \theta) = V = V P_0(\cos(\theta))$$

$$(ii): \quad \phi(R, \theta) = V \cos(\theta) = V P_1(\cos(\theta))$$

$$(iii): \quad \phi(R, \theta) = V[2 + \cos(\theta) - 3 \sin^2(\theta)] = V[-1 + \cos(\theta) + 3 \cos^2(\theta)] = V[P_1 + 2 P_2]$$

b) Mit Festlegung der beteiligten P_l am Rand liegen die benötigten l im ganzen Raum fest:

$$(i): \quad l = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(r, \theta) = [A_0 + B_0 \frac{1}{r}] P_0, \quad$$

$$\phi(R, \theta) = V P_0, \quad \phi(r \rightarrow \infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(r, \theta) = V \frac{R}{r}$$

$$(ii): \quad l = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(r, \theta) = [A_1 r + B_1 \frac{1}{r^2}] P_1, \quad$$

$$\phi(R, \theta) = V P_1, \quad \phi(r \rightarrow \infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(r, \theta) = V \frac{R^2}{r^2} \cos(\theta)$$

$$(iii): \quad l = 1, 2 \quad \Rightarrow \quad \phi(r \rightarrow \infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(r, \theta) = B_1 \frac{1}{r^2} P_1 + B_2 \frac{1}{r^3} P_2, \quad$$

$$\phi(R, \theta) = V[P_1 + 2 P_2]$$

$$\Rightarrow \quad \phi(r, \theta) = V \left[\frac{R^2}{r^2} \cos(\theta) + \frac{R^3}{r^3} \{3 \cos^2(\theta) - 1\} \right]$$

c) Wende Gauß an auf Kugelschale mit Radius $r > R$, dann ist $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ und damit $\mathbf{E} \mathbf{n} = E_r$.
Mit $E_r = -\partial_r \phi$ folgt

$$(i): \quad E_r = V \frac{R}{r^2}, \quad \oint_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \mathbf{n}' da' = \oint_{r'=r} E_r(r', \theta') da' = V \frac{R}{r^2} \oint_{r'=r} da' = V \frac{R}{r^2} (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

Das heißt, die Ladung q der Kugelschale ist die einer Punktladung am Ursprung, die im Abstand R dasselbe Potential hervorrufen würde.

$$(ii): \quad E_r = 2V \frac{R^2}{r^3} \cos(\theta), \quad \oint_{r'=r} E_r(r', \theta') da' = 2V \frac{R^2}{r^3} r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 d(\cos(\theta')) \cos(\theta') = 0$$

Die Gesamtladung der Kugelschale ist also $q = 0$, wie auch anschaulich klar ist (oder?!).

3 a) Rechte-Hand-Regel: Draht || z -Achse, also $\mathbf{B} || \mathbf{e}_\varphi$ in der x - y -Ebene. Betrachte ∂F = Kreis um Ursprung in x - y -Ebene mit Radius $r > 0$: $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\varphi ds$, $ds = r d\varphi$,

$$\oint_{\partial F} \mathbf{B}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \oint_{r'=r} B(r') ds' = B(r) 2\pi r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

b) Für $r \geq R$ kein Unterschied zum Draht; es geht ja nur der gesamte Strom durch die betrachtete Fläche ein, für $r \geq R$ ist das I .

$$r \geq R : \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Für $r < R$ trägt nur der Strom durch die Kreisscheibe mit Radius r bei, dies ist $I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$, also

$$r < R : \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2}{R^2} = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{r}{R}$$

c) Der Gesamtstrom I verteilt sich jetzt auf die Fläche $\pi(R^2 - R'^2)$.

$0 \leq r < R'$: Der Strom durch die Kreisscheibe mit Radius r ist null, also ist $B(r) = 0$

$R' \leq r < R$: Der Strom ist nun $I \frac{\pi(r^2 - R'^2)}{\pi(R^2 - R'^2)}$, also, $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2 - R'^2}{R^2 - R'^2}$

$R \leq r$: Die Kreisscheibe erfährt wieder den gesamten Strom, also $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$