$\boxed{1}$ **a)** Gegeben:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{B} = B\mathbf{e}_z \quad , \quad B = konst.$$

Gesucht ist das Wegintegral auf C = Kreis mit Radius R, der in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden soll. Der Weg wird in Polarkoord. parametrisiert:

$$I = \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{r}(\varphi) = R\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\\ 0\end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\varphi}\mathrm{d}\varphi \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\varphi} = R\begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\ \cos(\varphi)\\ 0\end{pmatrix} \equiv R\mathbf{e}_\varphi$$

Das Feld muß man auch noch berechnen:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{B}{2}(\mathbf{e}_z\times\mathbf{r}) = \frac{B}{2}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix} = \frac{B}{2}R\mathbf{e}_\varphi$$

Also:

$$I = \frac{B}{2}R^2\int_0^{2\pi}(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = B\,\pi R^2 = B\,F$$

b) Wir betrachten zunächst das rechts liegende (bei $x = +L$) Teilstück des Quadrates (mathem. positiver Umlaufsinn auf dem Weg):

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{e}_y\,s \quad , \quad 0 \le s < 2L \quad , \quad \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{e}_y\,\mathrm{d}s \quad , \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{B}{2}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix} = \frac{B}{2}\begin{pmatrix}-y\\ L\\ 0\end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}(\mathbf{r})\,\mathbf{e}_y = \frac{B}{2}L$$

damit

$$I_1 = \int_0^{2L}\mathbf{A}(\mathbf{r})\mathbf{e}_y\,\mathrm{d}s = \frac{BL}{2}\int_0^{2L}\mathrm{d}s = BL^2$$

Die anderen 3 Teilstücke liefern denselben Beitrag (die Teilstücke lassen sich bei festem Umlaufsinn durch Drehen um $\pi/2$ aufeinander abbilden), also

$$I = 4BL^2 = B\,F \quad , \quad F = (2L)^2$$

c) Stokes: $\oint_C \mathbf{A}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_F (\nabla \times \mathbf{A})\,\mathrm{d}\mathbf{a}$, $\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}a$

Dabei ist F die Fläche, die von C umrandet wird, mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}$ so gewählt, daß er zum Umlaufsinn auf C nach der "rechte-Hand-Regel" paßt. Also:

a): C mathematisch positiv $\Rightarrow$ $F =$ Kreisscheibe mit Radius R und $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$;

b): C mathematisch positiv $\Rightarrow$ $F =$ Quadrat mit Seitenlänge $2L$ und $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$;

In jedem Fall haben wir damit $\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{e}_z\,\mathrm{d}a$. Die Rotation des Feldes ist

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{B}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = B\,\mathbf{e}_z$$

damit

$$I = \int_F (\nabla \times \mathbf{A})\,\mathrm{d}\mathbf{a} = B\int_F (\mathbf{e}_z\,\mathbf{n})\,\mathrm{d}a = B\,F$$

völlig unabhängig von der Form der Fläche F. Das Wegintegral aus a), b) hat also für alle Flächen diesen Wert, solange die Fläche in der Ebene $\perp \mathbf{B}$ liegt.

c) Es gilt immer noch $\nabla \times \mathbf{A} = B\,\mathbf{e}_z$, aber die Fläche ist eine andere,

$$I = B\int_F (\mathbf{e}_z\,\mathbf{n})\,\mathrm{d}a \quad , \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_r \quad , \quad \mathrm{d}a = R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

also

$$I = BR^2\int_0^{\pi/2}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,\underbrace{(\mathbf{e}_z\,\mathbf{e}_r)}_{=\cos(\theta)} = BR^2 2\pi\int_0^1 \mathrm{d}(\cos(\theta))\,(\cos(\theta)) = B(\pi R^2) = B\,F_\perp$$

Von der gewählten Fläche zählt also nur die Projektion in die Ebene $\perp \mathbf{B}$.

2 **a)**

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int (\mathbf{r}\times\mathbf{j})\,\mathrm{d}^3r \quad , \quad \mathbf{j} = \mathbf{e}_\varphi\,I\,\delta(z)\,\delta(r-R) \quad , \quad \mathrm{d}^3r = \mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

einsetzen

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2}\int \mathrm{d}^3r\,\delta(z)\,\delta(r-R)\,(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_\varphi) = \frac{I}{2}R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,\underbrace{(\mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_\varphi)}_{=\mathbf{e}_z} = \mathbf{e}_z\frac{I}{2}2\pi R^2$$

also

$$\mathbf{m} = m\,\mathbf{e}_z \quad , \quad m = I\,F \quad , \quad F = \pi R^2$$

Das Kreuzprodukt kann man zu Fuß nachrechnen:

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_z$$

b) Das rechts liegende Teilstück liefert den Beitrag

$$\mathbf{m}_1 = \frac{I}{2} \int \mathrm{d}^3 r\, \delta(x-L)\, \delta(z)\, \Theta(L-|y|)\, (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_y) \quad , \quad \mathbf{r} \times \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Ausführen der Integration über x und z:

$$\mathbf{m}_1 = \frac{I}{2} \int_{-L}^{L} \mathrm{d}y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix} = \mathbf{e}_z\, I L^2$$

Die anderen 3 Teilstücke liefern denselben Beitrag (Abbildung der Teilstücke aufeinander durch Drehungen um $\pi/2$ erhält die Stromrichtung),

$$\mathbf{m} = 4\mathbf{m}_1 = m\, \mathbf{e}_z \quad , \quad m = I\, F \quad , \quad F = (2L)^2$$

c) Aus der Ladungsdichte und der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ ergibt sich die Stromdichte; hier ist außerdem $\mathbf{v}$ durch die Kreisfrequenz und die Rotationsachse gegeben,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\, \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\, (\omega \times \mathbf{r}) \quad , \quad \omega = \omega\, \mathbf{e}_z \quad , \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{Q\omega}{4\pi R^2}\, \delta(r-R)\, (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r})$$

Das Moment lautet also

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \frac{Q\omega}{4\pi R^2} \int \mathrm{d}^3 r\, \delta(r-R)\, [\, \mathbf{r} \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r})\,] \quad , \quad \mathrm{d}^3 r = r^2\, \mathrm{d}r\, \sin(\theta)\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \frac{Q\omega}{4\pi R^2} R^4 \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, [\, \mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r)\,]$$

Von

$$\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r) = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{x}\hat{z} \\ -\hat{y}\hat{z} \\ \hat{x}^2 + \hat{y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\cos(\theta)\, \cos(\varphi) \\ -\sin(\theta)\cos(\theta)\, \sin(\varphi) \\ \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

überlebt im φ-Integral nur die z-Komponente, also

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \frac{Q\omega}{4\pi R^2} R^4\, 2\pi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \mathbf{e}_z \frac{Q\omega R^2}{4} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta)\, [\, 1 - \cos^2(\theta)\,] = \frac{Q\omega R^2}{3} \mathbf{e}_z$$

Da die z-Achse stets durch die Rotationsachse gegeben sein kann (sonst keine ausgezeichnete Richtung vorhanden), folgt daraus

$$\mathbf{m} = \frac{QR^2}{3}\omega$$

$\boxed{3}$ **a)** Es kommt hier auf die Integrationsrichtung entlang der Leiterschleife in Bezug auf den Normalenvektor der umlaufenen Fläche an. Wenn wir also das Wegintegral in mathematisch positivem Sinn durchlaufen, muß der Normalenvektor $\mathbf{n}||\mathbf{e}_z$, also $\mathbf{n}||\mathbf{B}$ gewählt werden. Dann folgt

$$U = -\partial_t \Phi(t) \quad , \quad \Phi = \int_F \mathbf{Bn}\,\mathrm{d}a = B\,F$$

Dabei bedeutet $U > 0$: unten $+$, oben $-$.

(i): Der Fluß wird kleiner, also $+$ unten, $-$ unten,
(ii): Der Fluß wird größer, also $-$ unten, $+$ oben.

Lenz:
(i): Um ($+$ unten, $-$ oben) aufzubauen, fließt ein induzierter Strom in mathem. positiver Richtung, der ein Magnetfeld $\mathbf{B}'$ erzeugt, das innerhalb der Leiterschleife mit $\mathbf{B}$ gleichgerichtet ist, also dem Verlust an Fluß Φ entgegen wirkt.
(ii): Dto., nur andere Strom- und $\mathbf{B}'$-Richtung, so daß dem Gewinn an Φ entgegen gewirkt wird.

b)

$$\text{(i):} \quad \Phi(t) = B\,F(t) \quad , \quad \partial_t F(t) = -v\,L \quad , \quad |U| = BvL$$

Allerdings wird U nach der Zeit $T = L/v$ null.

$$\text{(ii):} \quad \Phi = B(t)L^2 \quad , \quad |U| = B_0\,L^2 = konst.$$