Universität Karlsruhe
Institut für Theoretische Teilchenphysik
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Dr. Robert Harlander, Dr. Jan Brinckmann
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre robert.harlander@cern.ch janbri@tkm.uni-karlsruhe.de

WS 2004/2005

24.11.04

Übungsblatt Nr. 6 zur Theorie C für Lehramtskandidaten

1 Wellengleichung:

Die eindimensionale Wellengleichung lautet $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi(x,t) = 0\,.$

a) Für welche k, ω ist $f(kx-\omega t)$ eine Lösung der Wellengleichung? f sei zunächst eine beliebige reelle Funktion. Geben Sie alle linear unabhängigen harmonischen Lösungen für $k \geq 0$ an, sowie die allgemeine relle Lösung $\Psi_k(x,t)$. Ist die Anzahl der Integrationskonstanten korrekt?

b) Zeigen Sie, daß Ψ_k dargestellt werden kann durch

$$\Psi_k(x,t) = \mathrm{Re}\widetilde{\Psi}_k(x,t) \quad , \quad \widetilde{\Psi}_k(x,t) = \widetilde{A}_k e^{i(kx-\omega t)} + \widetilde{B}_k e^{-i(kx+\omega t)} \quad , \quad k \geq 0\,. \tag{1}$$

Wie setzen sich die komplexen Konstanten $\widetilde{A}_k$, $\widetilde{B}_k$ aus den reellen Konstanten aus a) zusammen?

2 Superposition harmonischer Wellen:

a) Gehen Sie von Gl.(1) aus, und spezialisieren Sie Ψ_k für die Randbedingungen $\Psi_k(0,t) = \Psi_k(L,t) = 0\,,\ \forall t$. Welche k sind noch erlaubt? Skizzieren Sie die Welle für $t \geq 0$.

b) Bilden Sie die allgemeinste Lösung $\Psi(x,t)$ durch Superposition harmonischer Wellen Ψ_k, (i) für die Randbedingungen aus a), (ii) ohne jede Randbedingungen.

c) Angenommen, durch bestimmte Anfangsbedingungen bekommt $\Psi(x,t)$ die Form

$$\Psi(x,t) = \mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, A(k)\, e^{ik(x-ct)}\right\} \quad , \quad \text{mit} \quad \begin{array}{rcl} A(k) &=& \delta(k-k_0) \quad \text{oder} \\ A(k) &=& \Theta(K-|k-k_0|)\,,\ K>0 \end{array}$$

Berechnen Sie $\Psi(x,t)$ für beide $A(k)$. Skizzieren Sie $A(k)$ und Ψ_k.

3 Eichtransformation:

Gegeben Sei das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\,0,\ 0,\ A_0 \ln[\sqrt{x^2+y^2}\,]\,)$.

a) Man berechne das Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

b) Durch die Eichtransformation $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \mapsto \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\lambda(\mathbf{r})$ wird auf ein anderes, physikalisch äquivalentes Vektorpotential $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ übergegangen.
Finden Sie eine Eichfunktion $\lambda(\mathbf{r})$ derart, daß $\mathbf{A}'$ die Form $\mathbf{A}' = (A'_x, A'_y, 0)$ annimmt, und geben Sie $\mathbf{A}'$ an. Überprüfen Sie, daß sich $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ gegenüber a) nicht ändert.

4 Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

Gegeben sei eine ebene Welle mit Vektorpotential $\mathbf{A}$ und Skalarpotential ϕ,
$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}_0\, e^{i(\mathbf{k}\,\mathbf{r}-\omega\, t)}$, $\phi(\mathbf{r},t) = 0$, $\mathbf{k}\,, \mathbf{A}_0\,, \omega = \text{konst.}$

a) Berechnen Sie $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$.

b) Zeigen Sie, daß diese $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ die Maxwell-Gleichungen im Vakuum lösen. Welche Bedingungen folgen für $\mathbf{k}$, $\mathbf{A}_0$, ω? Was folgt für die Orientierung von $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$?

— Besprechung in den Übungsgruppen ab Dienstag, 30.11.04 —