Theorie C f. Lehramtskandidaten (WS 2004/05)

Musterlösung Übungsblatt **6** 01.12.04

$\boxed{1}$ **a)**

$$\partial_x^2 f(kx-\omega t) = k^2 f'' \quad , \quad \partial_t^2 f(kx-\omega t) = \omega^2 f'' \quad \Rightarrow \quad k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad , \quad \omega = \pm k\, c$$

f ist also Lösung für beliebiges k und $\omega = kc$ oder $\omega = -kc$. Wenn wir auf $\boxed{k \geq 0}$ beschränken (k ist der Betrag des "Wellenvektors") und $\boxed{\omega := kc}$ definieren (wie üblich: Frequenz positiv), dann gibt es zu festem f vier Lösungen:

$$f(k\,x-\omega\,t) \quad , \quad f(k\,x+\omega\,t) \quad , \quad f(-k\,x-\omega\,t) \quad , \quad f(-k\,x+\omega\,t) \quad , \quad k \geq 0 \quad , \quad \omega = k\,c$$

Eine harmonische Lösung ist $f = \cos$ oder $f = \sin$. Von den insgesamt 8 Lösungen sind aber nur 4 linear unabhängig:

$$\begin{aligned} \Psi_k(x,t) &= a\,\cos(kx-\omega t) + b\,\sin(kx-\omega t) + c\,\cos(kx+\omega t) + d\,\sin(kx+\omega t) \\ &= \hat{a}\cos(kx-\omega t+\varphi_-) + \hat{b}\cos(kx+\omega t+\varphi_+) \end{aligned}$$

Die Zahl der (reellen) Integrationskonstanten ist korrekterweise 4: DGL 2. Ordnung pro unabhängiger Variable x, t.

b) Realteil von $\widetilde{\Psi}_k$ berechnen:

Mit $\quad \widetilde{A}_k = (A+iA') \quad , \quad \widetilde{B}_k = (B+iB') \quad$ folgt

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}_k(x,t) &= (A+iA')[\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)] + (B+iB')[\cos(kx+\omega t) - i\sin(kx+\omega t)] \\ &= [A\cos(kx-\omega t) - A'\sin(kx-\omega t) + B\cos(kx+\omega t) + B'\sin(kx+\omega t)] + i[\ldots] \\ \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\widetilde{\Psi}_k &= \Psi_k \qquad \text{für} \qquad A=a\,,\ A'=-b\,,\ B=c\,,\ B'=d \end{aligned}$$

also ist

$$\psi_k(x,t) = \mathrm{Re}\{(a-ib)e^{i(kx-\omega t)} + (c+id)e^{-i(kx+\omega t)}\}$$

$\boxed{2}$ **a)**

$$\widetilde{\Psi}_k(x,t) = [\,\widetilde{A}e^{ikx} + \widetilde{B}e^{-ikx}\,]e^{-i\omega t}$$

Randbedingungen:

$$x = 0: \quad (\widetilde{A} + \widetilde{B}) = 0 \quad , \quad \widetilde{\Psi}_k(x,t) = \widetilde{A} 2i \, \sin(kx) \, e^{-i\omega t}$$

$$x = L: \quad \sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n\,\pi \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots (k \geq 0\,!) \quad \Rightarrow \quad k \equiv k_n = \frac{n\,\pi}{L}$$

also ist

$$\widetilde{\Psi}_k(x,t) = \widetilde{D} \sin(k_n x) \, e^{i\omega_n t} \quad , \quad \omega_n = ck_n = c\frac{n\pi}{L} \quad , \quad \widetilde{D} = 2i\widetilde{A}$$

mit einer willkürlich benannten neuen Konstanten $\widetilde{D}$.

Der Realteil lautet dann

$$\Psi_k(x,t) = \sin(k_n x)[\, d_1 \, \cos(\omega_n t) + d_2 \, \sin(\omega_n t)\,]$$

mit $d_1 = \mathrm{Re}(\widetilde{D})$, $d_2 = \mathrm{Im}(\widetilde{D})$, die durch weitere Anfangsbedingungen festgelegt werden können. Alternativ kann man schreiben: $\widetilde{D} = d\, e^{i\varphi}$, also

$$\Psi_k(x,t) = d \, \sin(k_n x) \, \cos(\omega_n t - \varphi)$$

Für jedes k_n bzw. n gibt es einen Satz der auftrenden Integrationskonstanten d_1, d_2, d, φ etc.

Dies ist eine stehende Welle; die Amplitude oszilliert mit der Zeit, die Welle propagiert aber nicht.

b) Allgemeinste Lösung:

$$\text{(i)}: \qquad \Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \, \Psi_{k_n}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \, \sin(k_n x) \, \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

Ohne Randbedingungen sind alle k erlaubt, also

$$\text{(i)}: \qquad \Psi(x,t) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}k \, \alpha(k) \, \Psi_k(x,t)$$

Hier muß man z.B. Gl.(1) einsetzen,

$$\Psi(x,t) = \mathrm{Re}\left\{ \int_0^{\infty} \mathrm{d}k \, \left[\widetilde{A}(k) e^{i(kx-\omega t)} + \widetilde{B}(k) e^{-i(kx+\omega t)} \right] \right\} \quad , \quad \omega = c\,k$$

Mit der Definition

$$\widetilde{A}(k)\Big|_{k<0} = \widetilde{B}(-k)$$

läßt sich das kompakter schreiben

$$\Psi(x,t) = \mathrm{Re}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \widetilde{A}(k)\, e^{ik(x-ct)} \right\}$$

Dies ist die übliche Darstellung eines eindimensionalen Wellenpaketes.

<u>c)</u>

$$A(k) = \delta(k-k_0) \quad \Rightarrow \quad \Psi(x,t) = \mathrm{Re}(e^{ik_0(x-ct)}) = \cos(k_0 x - \omega_0 t) \quad , \quad \omega_0 = k_0\, c$$

... eine monochromatische Welle.

$$A(k) = \Theta(K - |k-k_0|) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -K < (k-k_0) < K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$A(k)$ beschreibt also ein Wellenpaket, dessen Verteilung im k-Raum um k_0 zentriert ist, aber eben nicht scharf wie oben, sondern mit einer Breite $2K$:

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= \mathrm{Re}\left\{ \int_{(-K+k_0)}^{(K+k_0)} \mathrm{d}k\, e^{ik(x-ct)} \right\} = \mathrm{Re}\left\{ \frac{e^{i(K+k_0)(x-ct)}}{i(x-ct)} - \frac{e^{i(-K+k_0)(x-ct)}}{i(x-ct)} \right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{ \frac{2\sin(K(x-ct))}{(x-ct)} e^{ik_0(x-ct)} \right\} \\ &= 2K\, \frac{\sin(\gamma)}{\gamma} \cos(k_0(x-ct)) \quad , \quad \gamma = K(x-ct) \end{aligned}$$

Es handelt sich also um eine monochromatische Welle mit Wellenzahl k_0, die von einer Hüllkurve $\sin(\gamma)/\gamma$ moduliert ist (mal plotten für $K \ll k_0$!). Die Breite der Hüllkurve ist ungefähr durch $1/K$ gegeben. Das ganze propagiert mit c in x-Richtung mit der Zeit. Man beachte: Die Wellenzüge unter der Hüllkurve propagieren nicht relativ zur Hüllkurve: Phasengeschwindigkeit = Gruppengeschw. = c.

3 <u>a)</u>

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (0,0,A_z) \quad , \quad A_z = A_z(x,y) = A_0 \ln(\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{A_0}{2} \ln(x^2+y^2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z \\ -\partial_x A_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_x A_z = A_0 \frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad \partial_y A_z = A_0 \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{A_0}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Eichtrafo: $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda\,.$

Für $\mathbf{A}' = (A'_x, A'_y, 0)$ muß also gelten:

$$A'_z = A_z + \partial_z\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_z\lambda(\mathbf{r}) = -A_z(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \lambda(\mathbf{r}) = -z\,A_z(x,y) + const.(x,y)$$

Die "Konstante" darf noch von x, y abhängen, wir setzen am einfachsten $const. = 0$. Also:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x\lambda \\ \partial_y\lambda \\ A_z + \partial_z\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x\lambda \\ \partial_y\lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z\,\partial_x A_z \\ -z\,\partial_y A_z \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{A_0}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -xz \\ -yz \\ 0 \end{pmatrix}$$

Test: es muß dasselbe B-Feld resultieren:

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -z\,\partial_x A_z \\ -z\,\partial_y A_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z \\ -\partial_x A_z \\ z[\,\partial_x\partial_y A_z - \partial_y\partial_x A_z\,] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z \\ -\partial_x A_z \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \surd$$

$\boxed{4}$ **a)**

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = i\omega\,\mathbf{A_0}\,e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} = i\omega\,\mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_0^x\,e^{\cdots} \\ A_0^y\,e^{\cdots} \\ A_0^z\,e^{\cdots} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ ik_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_0^x \\ A_0^y \\ A_0^z \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} = i(\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0)e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} = i(\mathbf{k} \times \mathbf{A})$$

b) Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

$$\nabla\mathbf{E} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla\mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

Der Reihe nach auf beiden Seiten einsetzen:

$$\nabla\mathbf{E} = i\omega \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^x\,e^{\cdots} \\ A_0^y\,e^{\cdots} \\ A_0^z\,e^{\cdots} \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ ik_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^x \\ A_0^y \\ A_0^z \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} = -\omega\,\mathbf{kA} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{kA} = 0$$

$$\nabla \mathbf{B} = i \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0)_x \, e^{\cdots} \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0)_y \, e^{\cdots} \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0)_z \, e^{\cdots} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ ik_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0)_x \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0)_y \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0)_z \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} = -\mathbf{k}(\mathbf{k} \times \mathbf{A}) \equiv 0 \quad \surd$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \, (\nabla \times \mathbf{A}) = i\omega \, \mathbf{B} \ , \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -i\omega \, \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \surd$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = i \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0)_x \, e^{\cdots} \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0)_y \, e^{\cdots} \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0)_z \, e^{\cdots} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ ik_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0)_x \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0)_y \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0)_z \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} = -\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{A})$$

$$= -k^2 |\mathbf{A}| \underbrace{\mathbf{e}_k \times (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_A)}_{= \, -\mathbf{e}_A} = k^2 \, \mathbf{A} \ , \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = c^2 k^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \pm ck$$

Diese ebene Welle ist also eine Lösung der Maxwell-Gleichungen, falls gilt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = 0 \ , \quad \omega = \pm c \, k$$

Aus $\mathbf{Ak} = 0$ folgt auch $\mathbf{Ek} = 0$. Außerdem gilt sowieso

$$\mathbf{EB} = -\omega \, \mathbf{A}(\mathbf{k} \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

so daß

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{B} \ , \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{k} \ , \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{k}$$

$\Rightarrow$ transversale Welle.