Universität Karlsruhe
Institut für Theoretische Teilchenphysik
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Dr. Robert Harlander, Dr. Jan Brinckmann
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre robert.harlander@cern.ch janbri@tkm.uni-karlsruhe.de

WS 2004/2005

01.12.04

Übungsblatt Nr. 7 zur Theorie C für Lehramtskandidaten

1 Polarisation:
Eine ebene Welle ist gegeben durch
$\mathbf{E} = (E_1\,\mathbf{e}_1 + E_2\,\mathbf{e}_2)\,e^{i(\mathbf{k}\,\mathbf{r}-\omega\,t)}$, E_1, E_2 =komplexe Konstanten.

a) Wie sind die Vektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{k}$ orientiert? Woraus folgt das?
Warum gibt es kein $E_3\,\mathbf{e}_3$?

b) Es sei nun $\mathbf{k} = k\,\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y$, und $E_1 = A$, $E_2 = B\,e^{i\varphi}$, A, B =reell.
Für welche A, B, φ handelt es sich um eine
linear, zirkular, elliptisch polarisierte Welle? Man beschreibe / skizziere jeweils den zeitlichen Verlauf der Spitze des Vektors $\mathrm{Re}(\mathbf{E})$ in der x-y-Ebene.

2 Fourier-Transformation:

a) Man berechne die Fourier-Transformierte $\widetilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,e^{-i\omega\,t}f(t)$
für $f(t) = \Theta(T-|t|)$, $f(t) = \cos(\omega_0\,t)$, $f(t) = \Theta(t)\,e^{-\gamma\,t}\sin(\omega_0\,t)$, $\gamma > 0$.

b) Man berechne die dreidimensionale Fourier-Transformierte $\widetilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\mathrm{d}^3r\,e^{-i\mathbf{k}\,\mathbf{r}}f(\mathbf{r})$
für $f(\mathbf{r}) = \cos(\mathbf{q}\,\mathbf{r})$, $f(\mathbf{r}) = \delta(R-|\mathbf{r}|)$, $f(\mathbf{r}) = g(z)\,h(x)$.

3 Inhomogene Schwingungsgleichung:
Die DGL eines gedämpften harmonischen Oszillators mit externer Kraft $h(t)$ lautet
$[\,\partial_t^2 + 2\gamma\,\partial_t + \omega_0^2\,]f(t) = h(t)$, $-\infty < t < \infty$.

a) Die Greensche Funktion ist definiert durch
$[\,\partial_t^2 + 2\gamma\,\partial_t + \omega_0^2\,]G(t-t') = \delta(t-t')$ mit den Randbedingungen $G(\infty) = G(-\infty) = 0$.
Angenommen, G sei bekannt. Wodurch ist $f(t)$ gegeben (Beweis durch Einsetzen)?

b) G ergibt sich aus der Fourier-Transformierten $\widetilde{G}(\omega)$ durch
$G(t-t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\,e^{i\omega(t-t')}\widetilde{G}(\omega)$. Bestimmen Sie $\widetilde{G}$, und zeigen Sie, daß $\widetilde{G}$ für kleine Dämpfung $(\gamma)^2 \to 0$ die Form $\widetilde{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2\omega_0}\left[\frac{1}{\omega_0-\omega+i\gamma} + \frac{1}{\omega_0+\omega-i\gamma}\right]$ annimmt.
[Sie benötigen die Fourier-Darstellung der δ-Funktion.]

c) Bestimmen Sie daraus $G(t-t')$ (z.B. durch Raten und Beweis über die Umkehrtransformation). Erfüllt $G(t-t')$ die Randbedingungen?

d) Man berechne $f(t)$ für $h(t) = h_0\,\delta(t-t_0)$.
Wodurch ist $\widetilde{f}(\omega)$ gegeben, wenn $\widetilde{G}(\omega)$ und $\widetilde{h}(\omega)$ bekannt sind?
Berechnen Sie $\widetilde{f}(\omega)$ für $h(t) = h_0\,\cos(\hat{\omega}\,t)$.
Welche Bedeutung haben also $G(t-t')$, Betrag von $\widetilde{G}(\omega)$, Phase von $\widetilde{G}(\omega)$?

4 Inhomogene Wellengleichung:
Zeigen Sie durch Einsetzen, daß $\widetilde{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega) = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$, $k = \omega/c$

eine Lösung der Helmholtz-Gleichung $[\,\nabla^2 + k^2\,]\widetilde{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ ist.
[Sie können das Ergebnis aus der Elektrostatik verwenden, $\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$.]

— Besprechung in den Übungsgruppen ab Dienstag, 07.12.04 —