Theorie C f. Lehramtskandidaten (WS 2004/05)

Musterlösung Übungsblatt **7** 08.12.04

$\boxed{1}$ **a)** Aus den Maxwell-Gleichungen folgt für eben Wellen $\mathbf{E} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{k}$. $\mathbf{E}$ muß also in der Ebene $\perp$ $\mathbf{k}$ liegen, die von xwei linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ aufgespannt wird. Ein Term $E_3\,\mathbf{e}_3$ wäre lin. abhängig.

b) Das *komplexe* E-Feld lautet jetzt

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} A \\ Be^{i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)} \quad , \quad \omega = k\,c$$

Linear:

$$\varphi = 0 \ : \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} A \\ B \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t)$$

Für festes z liegt die Orientierung in der x-y-Ebene fest, lediglich die Amplitude (Länge des Vektors) oszilliert.

Zirkular:

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \quad , \quad B = A \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(\mathbf{E}) = A \begin{pmatrix} \cos(kz-\omega t) \\ \mp\sin(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für festes z beschreibt Re$\mathbf{E}$ einen Kreis mit Radius A in der x-y-Ebene; die Welle gleicht einer Schraube entlang der z-Achse.

Elliptisch:

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \quad , \quad B \neq A \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(\mathbf{E}) = A \begin{pmatrix} \cos(kz-\omega t) \\ \mp\frac{B}{A}\sin(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus dem Kreis wird jetzt eine Ellipse mit Halbachsen entlang der x bzw. y-Achse.

Und als Ergänzung: *Allgemein:*

$$\begin{aligned} E_x &= Ae^{i(kz-\omega t)} &\rightarrow \ \mathrm{Re}(E_x) &= A\cos(kz-\omega t) \\ E_y &= Be^{i(kz-\omega t+\varphi)} &\rightarrow \ \mathrm{Re}(E_y) &= B\cos(kz-\omega t)\cos(\varphi) - B\sin(kz-\omega t)\sin(\varphi) \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{Re}(\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} A\cos(kz-\omega t) \\ B[\,\cos(kz-\omega t)\cos(\varphi) - \sin(kz-\omega t)\sin(\varphi)\,] \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos(kz-\omega t) \\ B\cos(kz-\omega t+\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für $z = const.$ ist dies auch eine Ellipse, mit gedrehten Hauptachsen. Das wird etwas deutlicher, wenn man schreibt

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} A\,e^{-i\varphi/2} \\ B\,e^{i\varphi/2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t+\varphi/2)}$$

Nach einer Neudefinition des Zeitnullpunktes folgt jetzt für $z = const.$ eine Ellipse wie für $\varphi = \pi/2$, die um den Winkel $\varphi' = (\varphi - \pi/2)$ gedreht ist. Nachprüfen durch explizites Anmultiplizieren einer Drehmatrix.

$\boxed{2}$ a)

- $f(t) = \Theta(T-|t|) \quad \Rightarrow \quad \widetilde{f}(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-T}^{T} \mathrm{d}t\, e^{-i\omega t} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{e^{-i\omega T} - e^{+i\omega T}}{-i\omega} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}T\dfrac{\sin(\omega T)}{\omega T}$

- $$\begin{aligned} f(t) = \cos(\omega_0 t) &= \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \\ \Rightarrow \quad \widetilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, e^{-it(\omega-\omega_0)}}_{=\,2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, e^{-it(\omega+\omega_0)}}_{=\,2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)}\Big] \\ \Rightarrow \quad \widetilde{f}(\omega) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}[\,\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\,] \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f(t) = \Theta(t)e^{-\gamma t}\sin(\omega_0 t) &= \frac{1}{2i}(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})e^{i(i\gamma)t} \\ \Rightarrow \quad \widetilde{f}(\omega) &= \frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, e^{-it(\omega-\omega_0-i\gamma)} - \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, e^{-it(\omega+\omega_0-i\gamma)}\Big] \\ \Rightarrow \quad \widetilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\omega+\omega_0-i\gamma} - \frac{1}{\omega-\omega_0-i\gamma}\right] \end{aligned}$$

b)

- $f(\mathbf{r}) = \cos(\mathbf{q}\,\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \widetilde{f}(\mathbf{k}) = \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\dfrac{1}{2}\Big[\displaystyle\int \mathrm{d}^3r\, e^{-i\mathbf{r}(\mathbf{k}+\mathbf{q})} + \int \mathrm{d}^3r\, e^{-i\mathbf{r}(\mathbf{k}-\mathbf{q})}\Big]$

$$\int \mathrm{d}^3r\, e^{i\mathbf{r}\,\mathbf{Q}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{ix\,Q_x} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, e^{iy\,Q_y} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, e^{iz\,Q_z} = (2\pi)^3\, \delta(Q_x)\,\delta(Q_y)\,\delta(Q_z) \equiv (2\pi)^3\,\delta(\mathbf{Q})$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{3/2}\frac{1}{2}[\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{q}) + \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})\,]$$

- $f(\mathbf{r}) = \delta(R - |\mathbf{r}|) \quad \Rightarrow \quad$
$$\widetilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) \int_0^{\infty} r^2\,\mathrm{d}r\, e^{-ikr\cos(\theta)}\delta(R-r)$$
$$= \frac{R^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, e^{-ikR\,x} = \frac{R^2}{\sqrt{2\pi}} 2\frac{\sin(kR)}{(kR)}$$

- $f(\mathbf{r}) = g(z)\,h(x) \;\Rightarrow\;$
$$\widetilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ik_x\,x} h(x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, e^{-ik_y\,y} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, e^{-ik_z\,z} g(z)$$
$$= \sqrt{2\pi}\,\widetilde{h}(k_x)\,\delta(k_y)\,\widetilde{g}(k_z)$$

3 <u>**a)**</u> Wenn G bekannt, dann ist

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\, G(t-t')\,h(t')$$

eine partikuläre Lösung. Beweis:

$$[\,\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2\,]f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\,\delta(t-t')\,h(t') = h(t) \quad \checkmark$$

<u>**b)**</u> Fourier-Darstellungen:

$$G(t-t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, e^{i\omega(t-t')}\,\widetilde{G}(\omega)$$

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, e^{i\omega(t-t')}$$

Das einsetzen in die DGL für G:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \left[\widetilde{G}(\omega) \underbrace{(\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2)e^{i\omega(t-t')}}_{= (-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2)e^{i\omega(t-t')}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega(t-t')} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, e^{i\omega(t-t')} \left[(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2)\widetilde{G}(\omega) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right] = 0$$

Da t, t' beliebig, muß die $[\dots]$ verschwinden,

$$\Rightarrow \quad \widetilde{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega}$$

Für kleine Dämpfung werden alle Terme $\sim \gamma^2$ vernachlässigt. Das angegebene $\widetilde{G}$ ist dann die entsprechende Näherung für $\widetilde{G}$: Bilden des Hauptnenners liefert

$$\widetilde{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\omega_0} \left[\frac{2\omega_0}{\omega_0^2 - (\omega - i\gamma)^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega + \gamma^2} \right]$$

Für $\gamma^2 \to 0$ entspricht das dem oben abgeleiteten Ausdruck. Der Vorteil der Näherung für kleine Dämpfung ist, daß die Fourier-Rücktransformation leichter zu berechnen ist.

c) Von $\boxed{2}$ wissen wir:

$$\widetilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\omega_0 + \omega - i\gamma} + \frac{1}{\omega_0 - \omega + i\gamma} \right] \quad \text{gehört zu} \quad f(t) = \Theta(t)\, e^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t)$$

Also ist zu vermuten, daß

$$G(t - t') = \frac{1}{\omega_0} \Theta(t - t') e^{-\gamma(t-t')} \sin(\omega_0 [t - t'])$$

Durch explizite Berechnung von $\widetilde{G}$ läßt sich leicht überprüfen, daß das stimmt.

Randbedingungen: $\widetilde{G}(\infty) = \widetilde{G}(-\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad \surd$

d)

- $h(t) = h_0\, \delta(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad f(t) = h_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\, G(t - t')\, \delta(t' - t_0) = h_0\, G(t - t_0)$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{h_0}{\omega_0} \Theta(t - t_0)\, e^{-\gamma(t-t_0)} \sin(\omega_0 [t - t_0])$$

Dies ist gedämpfte Schwingung, die bei $t = t_0$ einsetzt.

$G(t-t')$ ist offenbar die *Impulsantwort* auf einen δ-Impuls zur Zeit t'.

Im Frequenzbereich, allgemein:
Einsetzen der Fourier-Darstellungen für $f(t), G(t-t'), h(t')$ in den Ausdruck für $f(t)$ liefert

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\, G(t-t')\, h(t') \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, e^{i\omega t} \Big[\widetilde{f}(\omega) - \widetilde{G}(\omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega'\, \widetilde{h}(\omega') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\, e^{-i\omega t'} e^{i\omega' t'}}_{2\pi\,\delta(\omega-\omega')} \Big] = 0$$

Für alle t,

$$\Rightarrow \quad \widetilde{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\, \widetilde{G}(\omega)\, \widetilde{h}(\omega)$$

Das ist natürlich gerade das Faltungstheorem.

Für eine monochromatische Anregung (schon in $\boxed{2}$ berechnet)

$$h(t) = h_0 \cos(\hat{\omega} t) \quad \Rightarrow \quad \widetilde{h}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} h_0 [\, \delta(\omega - \hat{\omega}) + \delta(\omega + \hat{\omega})\,]$$

ergibt das

$$\widetilde{f}(\omega) = h_0 \pi [\, \widetilde{G}(\hat{\omega})\, \delta(\omega - \hat{\omega}) + \widetilde{G}(-\hat{\omega})\, \delta(\omega + \hat{\omega})\,]$$

Für positive Frequenzen $\omega, \hat{\omega}$ ergibt sich

$$\widetilde{f}(\omega) = h_0 \pi\, \widetilde{G}(\hat{\omega})\, \delta(\omega - \hat{\omega})$$

D.h., $\widetilde{G}$ beschreibt die Antwort des Oszillators im eingeschwungenen Zustand auf eine bestimmte Anregungsfrequenz. Da die externe Kraft linear (in 1. Ordnung $\sim h(t)$) an das System ankoppelt, wird $\widetilde{G}$ auch lineare Antwortfunktion genannt.

Im Allgemeinen (z.B. auch der Oszillator) ist $\widetilde{G}$ komplex. Im Zeitbereich ist

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, e^{i\omega t} \widetilde{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} h_0\, e^{i\hat{\omega} t} \widetilde{G}(\hat{\omega})$$

$$\text{Mit} \quad \widetilde{G}(\omega) = |\widetilde{G}|\, e^{i\varphi} \quad \text{folgt} \quad f(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} h_0\, |\widetilde{G}|\, e^{i(\hat{\omega} t + \varphi)}$$

also

$$\mathrm{Re}\, f(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} h_0 \, |\widetilde{G}| \, \cos(\hat{\omega} t + \varphi)$$

Der Betrag von $\widetilde{G}$ bestimmt also die Amplitude, die Phase von $\widetilde{G}$ die Phasenverschiebung relativ zur Anregung.

4

$$\widetilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \quad , \quad R \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

Laplace darauf loslassen:

$$\nabla^2 \, \widetilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \frac{1}{4\pi} \left[(\nabla^2 e^{ikR}) \frac{1}{R} + e^{ikR} (\nabla^2 \frac{1}{R}) + 2 (\nabla e^{ikR}) \, (\nabla \frac{1}{R}) \right]$$

Die Einzelteile:

$$\begin{aligned}
(\nabla e^{ikR}) &= (ik) e^{ikR} (\nabla R) \\
(\nabla \frac{1}{R}) &= -\frac{1}{R^2} (\nabla R) \\
(\nabla^2 e^{ikR}) &= (-k^2) e^{ikR} (\nabla R)^2 + (ik) e^{ikR} (\nabla^2 R) \\
(\nabla^2 \frac{1}{R}) &= -4\pi \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')
\end{aligned}$$

Das einsetzen ergibt zunächst mal

$$\nabla^2 \, \widetilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \frac{1}{4\pi} \, e^{ikR} \left[(-k^2) \frac{(\nabla R)^2}{R} + (ik) \frac{(\nabla^2 R)}{R} - 2(ik) \frac{(\nabla R)^2}{R^2} - 4\pi \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right]$$

Es fehlen noch die folgenden Ausdrücke/Teile/Brocken:

$$\begin{aligned}
(\nabla R) &= \nabla \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \equiv \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{R} \quad \Rightarrow \quad (\nabla R)^2 = \frac{R^2}{R^2} = 1 \\
(\nabla^2 R) &= \nabla \frac{1}{R} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{R^2} (\nabla R)(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{1}{R} \underbrace{\nabla (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}_{= 3} = \frac{3}{R} - \frac{1}{R} = \frac{2}{R}
\end{aligned}$$

Die Terme $\sim (ik)$ fallen damit heraus, und schließlich:

$$\nabla^2 \, \widetilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - k^2 \left(\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \right) \quad \Rightarrow \quad \surd$$