Theorie C f. Lehramtskandidaten (WS 2004/05)

Musterlösung Übungsblatt **8** 15.12.04

$\boxed{1}$ **a)**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{p}_x/r \\ \dot{p}_y/r \\ \dot{p}_z/r \end{pmatrix}$$

mit $p \equiv p(t - r/c)$.

$$\begin{aligned}
\partial_j \frac{\dot{p}_i}{r} &= \frac{1}{r}(\partial_j \dot{p}_i) - \frac{1}{r^2}(\partial_j r)\dot{p}_i \\
\partial_j \dot{p}_i &= -\frac{1}{c}\ddot{p}_i(\partial_j r) \\
\partial_j r &= \frac{x_j}{r} \\
\Rightarrow \quad \partial_j \frac{\dot{p}_i}{r} &= \left[-\frac{1}{c}\frac{1}{r}\ddot{p}_i - \frac{1}{r^2}\dot{p}_i \right] \frac{x_j}{r} = -\frac{1}{c}\,\frac{1}{r}\,\ddot{p}_i\,(\mathbf{e}_r)_j
\end{aligned}$$

Für $r \to \infty$ fällt der zweite Term schneller ab als der erste, also haben wir nur den ersten (den führenden) mitgenommen.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\,\frac{1}{r}\,\mathbf{e}_r \times \ddot{\mathbf{p}}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}$$

Dazu:

$$\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \sum_i \nabla \left(\frac{x_i}{r^2}\dot{p}_i \right)$$

$$\begin{aligned}
\partial_j \left(\frac{x_i}{r^2}\dot{p}_i \right) &= -\frac{1}{r^3}(\partial_j r)x_i\dot{p}_i + \frac{1}{r^2}(\partial_j x_i)\dot{p}_i + \frac{1}{r^2}x_i(\partial_j \dot{p}_i) \\
&= -\frac{1}{r^2}\left(\frac{x_j}{r}\right)\left(\frac{x_i}{r}\right)\dot{p}_i + \frac{1}{r^2}\dot{p}_i\,\delta_{ij} - \frac{1}{r}\,\frac{1}{c}\,\left(\frac{x_i}{r}\right)\left(\frac{x_j}{r}\right)\ddot{p}_i
\end{aligned}$$

Für $r \to \infty$ ist der letzte Term der führende

$$\Rightarrow \quad \nabla\phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\,\frac{1}{r}\,(\mathbf{e}_r\ddot{\mathbf{p}})\mathbf{e}_r$$

Außerdem:

$$\partial_t \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,\ddot{\mathbf{p}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,[\,(\mathbf{e}_r\ddot{\mathbf{p}})\mathbf{e}_r - \ddot{\mathbf{p}}\,]$$

Die im Übungsblatt angegebene Formel ergibt dasselbe, wenn man die Relation (Jackson Seite 0)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - (\mathbf{ab})\mathbf{c} \tag{1}$$

darauf losläßt. Zur Not kann man sich auch komponentenweise davon überzeugen ...

b) Dipolmoment wie in Elektrostatik:

$$\mathbf{p}(t) = \int \mathrm{d}^3r\,\rho(\mathbf{r},t)\,\mathbf{r}$$

Hier:

$$\rho(\mathbf{r},t) = e\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \quad , \quad \mathbf{r}_0(t) = \mathbf{e}_z\,d\,\sin(\omega_0\,t)$$

also

$$\mathbf{p}(t) = e\,\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{p}_0\,\sin(\omega_0 t) \quad , \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{e}_z\,p_0 \quad , \quad p_0 = e\,d \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{p}_0\,\omega_0^2\,\sin(\omega_0\,t)$$

Damit

$$\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}_r = -p_0\,\omega_0^2\,\sin(\omega_0[t - r/c])(\underbrace{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r}_{=\sin(\theta)\mathbf{e}_\varphi})$$

mit Kugelkoordinaten (r, θ, φ) für die z-Achse || Dipolmoment, und den orthonormalen Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Man kann natürlich das Kreuzprodukt komponentenweise ausführen, mit demselben Ergebnis.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\,\frac{1}{r}\,\omega_0^2\,p_0\,\sin(\omega_0[t - r/c])\,\sin(\theta)\,\mathbf{e}_\varphi \quad , \quad p_0 = e\,d$$

Und:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,\omega_0^2\,p_0\,\sin(\omega_0[t - r/c])\,\sin(\theta)\,\underbrace{(\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r)}_{=\mathbf{e}_\theta}$$

Strahlungsfeld:
Betrag: in Richtung des Dipols, $\theta = 0, \pi$, keine Abstrahlung; senkrecht zum Dipol, $\theta = \pi/2$, maximale Amplitude.
Richtung: $\mathbf{E} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{e}_r$; $\mathbf{B} \sim \mathbf{e}_\varphi$ ist Wirbelfeld um Dipol-Achse; $\mathbf{E} \sim \mathbf{e}_\theta$ zeigt entlang der Kugeloberfläche von Nord nach Süd (oder umgekehrt).
Polarisation: Die Richtung von $\mathbf{E}$ ist $\mathbf{e}_\theta =$ konst. für $r =$ konst., also lineare Polarisation.

c) Ladungsdichte:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\,\delta(\mathbf{r}) - e\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \quad , \quad \mathbf{r}_0(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega_0\, t) \\ \sin(\omega_0\, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zum Dipolmoment trägt nur die 2. Ladung $-e$ bei,

$$\mathbf{p}(t) = -e\,\mathbf{r}_0(t) \quad , \quad \ddot{\mathbf{p}}(t) = eR\omega_0^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega_0\, t) \\ \sin(\omega_0\, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies einsetzen liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r} (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}_r) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r} eR\omega_0^2 \Big[\cos(\omega_0\, t') \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \end{pmatrix} + \sin(\omega_0\, t') \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \\ -\sin(\theta)\cos(\varphi) \end{pmatrix} \Big] \\ & \quad t' = t - \frac{r}{c} \end{aligned}$$

Polarisation:

$$\theta = 0 : \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r} eR\omega_0^2 \begin{pmatrix} \sin(\omega_0 t') \\ -\cos(\omega_0 t') \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im Gegensatz zu b) ist in z-Richtung Strahlung vorhanden, und zwar zirkular polarisiert; man sieht den rotierenden Dipol von oben.

$$\theta = \pi/2 : \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r} eR\omega_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(\omega_0 t' - \varphi) \end{pmatrix}$$

Dies ist ähnlich wie b), allerdings ist $\mathbf{B}$ in z-Richtung linear polarisiert, da der oszillierende Strom in der x-y-Ebene fließt.

$\mathbf{E}$ ist jetzt mal nur für die Spezialfälle $\theta = 0, \pi/2$ angegeben, was leicht aus $\mathbf{E} = c(\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r)$ folgt, wenn man vorher $\theta = 0$ oder $\pi/2$ einsetzt:

$$\theta = 0 \; : \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \, eR\omega_0^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 \, t') \\ \sin(\omega_0 \, t') \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \pi/2 \; : \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \, eR\omega_0^2 \, \sin(\omega_0 \, t') \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Polarisation ist natürlich jeweils dieselbe wie $\mathbf{B}$, mit (jeweils) $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.

d) Es ist $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$.

Durch die Rotation der Kugel wird zwar Ladung bewegt und es fließt Strom, aber die Ladungsdichte ist konstant, genauso wie die Stromdichte. Daher wird keine Strahlung emittiert.
Oder: Die Kugel hat zwar ein Dipolmoment, aber das ist zeitlich konstant.

e)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{E} = c(\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} = \frac{c}{\mu_0} (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r) \times \mathbf{B} = \frac{c}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{B})$$

Man kann nun für ein beliebiges $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ komponentenweise ausrechnen, oder Gl.(1) von oben verwenden:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{\mu_0} [\, \mathbf{e}_r (\mathbf{B}\mathbf{B}) - (\mathbf{B}\mathbf{e}_r)\mathbf{B} \,] = \frac{c}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \, \mathbf{e}_r \quad , \quad \text{mit} \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{e}_r$$

Die Energiestromdichte zeigt also immer in radialer Richtung nach außen.

Für das $\mathbf{B}$ aus b) folgt damit

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_r \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} p_0^4 \left(\frac{\omega_0^4}{r^2} \right) \sin^2(\theta) \sin^2(\omega_0 [t - r/c])$$

Die Abhängigkeit $\sim \sin^2(\theta)$ liefert die typische Strahlungscharakteristik.

f) $\mathbf{S}$ = Energie / Zeit / Fläche.

Die Leistung (Energie / Zeit) durch die Kugeloberfläche ist also

$$I(t) = \int_{\partial V} \mathbf{S} \, \mathrm{d}\mathbf{a} = R^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) \, \mathbf{S} \, \mathbf{e}_r = R^2 2\pi \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} p_0^4 \frac{\omega_0^4}{R^2} \sin^2(\omega_0 \, t') \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) \, \sin^2(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad I(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} p_0^4 \omega_0^4 \sin^2(\omega_0 \, t') \quad , \quad t' = t - \frac{r}{c} \quad , \quad p_0 = e \, d$$

Zeitmittel:

$$\overline{I} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, I(t) \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Da über eine komplette Periode integriert wird, können wir unter dem Integral im $\sin^2(\omega_0\, t')$ das t' durch t ersetzen:

$$\frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega_0} \mathrm{d}t\ \sin^2(\omega_0\, t) = \frac{1}{2}$$

damit

$$\overline{I} = \frac{\mu_0}{12\pi c} p_0^4\, \omega_0^4$$

Die mittlere durch die Kugelschale transmittierte Leistung ist offenbar von R unabhängig. Das muß ja auch so sein, denn die vom Dipol abgestrahlte Energie sollte ja erhalten sein (auf dem Weg durchs Vakuum). Die $1/r$-Faktoren, die immer in den Feldern $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$ auftauchen, sind also für die Energieerhaltung wichtig (sonst würde I mit R^2 zunehmen).
Da der Dipol aus einer angetriebenen Ladung besteht (Modell für eine Antenne), kann beliebig Energie nachgeliefert werden, und $\overline{I}$ ist zeitlich konstant. Für ein Elektron, das einen Kern umkreist z.B. ist das nicht so, und die abgestrahlte Leistung wird schwächer, während das Elektron auf den Kern trudelt. $\leftrightarrow$ Quantenmechanik!