Theorie C f. Lehramtskandidaten (WS 2004/05)

Musterlösung Übungsblatt **9** 22.12.04

$\boxed{1}$ **a)** Ursprung $\mathbf{R}$ von K_1' in K: $\mathbf{R}(t) = \mathbf{v}\,t$

Koordinaten der Teilchen in K_1': $\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{v}\,t \quad , \quad i = 1, 2$

Bewegungsgleichungen in K_1':

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i' \quad , \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2' \quad \Rightarrow \quad m_i\,\ddot{\mathbf{r}}_i' = \pm\mathbf{F}(|\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'|)$$

Die Bewegungsgleichungen sind dieselben wie in K. K_1' ist also auch ein Inertialsystem (das heißt: für $\mathbf{F} = 0$ bewegen sich die Teilchen gleichförmig in K als auch in K_1').

b) Koordinaten der Teilchen in K_2': $\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{v}\,t - \frac{1}{2}\mathbf{a}\,t^2$

Bewegungsgleichungen in K_2':

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i' + \mathbf{a} \quad , \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2' \quad \Rightarrow \quad m_i\ddot{\mathbf{r}}_i' = \pm\mathbf{F}(|\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'|) - m_i\,\mathbf{a}$$

Die Bewegungsgleichungen haben im beschleunigten Bezugssystem K_2' eine andere Form (sind *nicht* kovariant), für $\mathbf{F} = 0$ tritt eine Scheinkraft auf. K_2' ist also *kein* Intertialsystem.

c) K_3' ist relativ zu K um den Winkl $\varphi = \omega_0\,t$ um die gemeinsame z-Achse gedreht. Eine Koordinate $\mathbf{r}$ erscheint in K_3' also um den Winkel $-\varphi$ gedreht:

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{D}(-\varphi)\,\mathbf{r}_i \quad , \quad \mathbf{D}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bewegungsgleichung:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{D}(\varphi)\,\mathbf{r}_i' \quad , \quad \varphi = \omega_0\,t \quad , \quad |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{D}(\varphi)\,(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2')| = |\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'|$$

denn die reine Drehung $\mathbf{D}(\varphi)$ läßt die Länge des Vektors konstant.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i &= \dot{\mathbf{D}}(\varphi)\,\mathbf{r}_i' + \mathbf{D}(\varphi)\,\dot{\mathbf{r}}_i' \\ \ddot{\mathbf{r}}_i &= \ddot{\mathbf{D}}(\varphi)\,\mathbf{r}_i' + \mathbf{D}(\varphi)\,\ddot{\mathbf{r}}_i' + 2\dot{\mathbf{D}}(\varphi)\,\dot{\mathbf{r}}_i' \end{aligned}$$

$$m_i\,\mathbf{D}(\varphi)\,\ddot{\mathbf{r}}_i' = -m_i\,\ddot{\mathbf{D}}(\varphi)\,\mathbf{r}_i' - 2m_i\,\dot{\mathbf{D}}(\varphi)\,\dot{\mathbf{r}}_i' \pm \mathbf{F}(|\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'|)$$

$$\Rightarrow \quad m_i\,\ddot{\mathbf{r}}_i' = -m_i\,\mathbf{D}(-\varphi)\,\ddot{\mathbf{D}}(\varphi)\,\mathbf{r}_i' - 2m_i\,\mathbf{D}(-\varphi)\,\dot{\mathbf{D}}(\varphi)\,\dot{\mathbf{r}}_i' \pm \mathbf{D}(-\varphi)\,\mathbf{F}(|\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'|)$$

Dies reicht schon aus, alle Fragen zu beantworten. Der Anschaulichkeit halber gehen wir noch ins Detail:

$$\dot{\mathbf{D}}(\varphi) = -\omega_0 \begin{pmatrix} \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) & 0 \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \ddot{\mathbf{D}}(\varphi) = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{D}(-\varphi)\,\dot{\mathbf{D}}(\varphi) = -\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{D}(-\varphi)\,\ddot{\mathbf{D}}(\varphi) = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad m_i\,\ddot{\mathbf{r}}_i' = m_i\,\omega_0^2 \begin{pmatrix} \dot{x}_i' \\ \dot{y}_i' \\ 0 \end{pmatrix} + 2m_i\,\omega_0 \begin{pmatrix} -\dot{y}_i' \\ \dot{x}_i' \\ 0 \end{pmatrix} \pm \mathbf{D}(-\omega_0\,t)\,\mathbf{F}(|\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'|)$$

Offenbar kein Inertialsystem: die Rotation ist eine beschleunigte Bewegung, es treten Scheinkräfte (Zentrifugal und Coriolis) auf.

x) Es gibt unendlich viele Bezugssysteme, in denen die Bewegungsgleichungen die Form (1) haben: alle, die durch Galileitransformation aus I hervorgehen (inkl. I selbst natürlich). Dies sind die Inertialsysteme.

2 **a)** Wird in K die Wellenform $\Psi(x)$ beobachtet (t sei fest!), dann wird man in den Koordinaten von K' die Form $\Psi'(x')$ messen (' heißt *nicht* Ableitung ...),

$$\Psi'(x',t) = \Psi(x' + v\,t, t) = \Psi(x,t)$$

Umgekehrt gilt dann, für gegebenes $\Psi'(x')$,

$$\Psi(x,t) = \Psi'(x - v\,t, t) = \Psi'(x',t)$$

b) Ableitungen:

$$\begin{aligned} \partial_x \Psi(x,t) &= \partial_{x'}\Psi'(x',t) \quad , \quad \partial_x^2 \Psi = \partial_{x'}^2 \Psi' \\ \partial_t \Psi(x,t) &= \partial_t \Psi'(x',t) + \partial_{x'}\Psi'(x',t)\,\underbrace{\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}}_{=-v} \\ \Rightarrow \quad \partial_t^2 \Psi &= \partial_t^2 \Psi' + v^2\,\partial_{x'}^2 \Psi' - 2v\,\partial_t\,\partial_{x'}\Psi' \end{aligned}$$

Dies in die Wellengleichung einsetzen liefert

$$\left([\,1 - \frac{v^2}{c^2}\,]\,\partial_{x'}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \frac{2v}{c^2}\,\partial_t\,\partial_{x'} \right)\,\Psi'(x',t) = 0$$

c)

$$\Psi(x,t) = A\,\exp(ik(x-ct)) \quad , \quad \Psi'(x',t) = \Psi(x'+vt,t) = A\,\exp(ik(x'-[c-v]\,t))$$

Ableitungen:

$$\partial_{x'}^2 \Psi' = -k^2\,\Psi' \quad , \quad \partial_t^2 \Psi' = -k^2\,(c-v)^2\,\Psi' \quad , \quad \partial_t \partial_{x'} \Psi' = k^2\,(c-v)\,\Psi'$$

einsetzen

$$\Rightarrow \quad (1-\frac{v^2}{c^2}) - \frac{1}{c^2}(c-v)^2 - \frac{2v}{c^2}(c-v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \surd$$

x) Es gibt nur ein einziges Bezugssystem, in dem die Wellengleichung die gewohnte einfache Form hat: das, in dem das Trägermedium (der Fluß) ruht. D.h., die Inertialsysteme der klassischen Mechanik (die durch Galileitransformationen auseinander hervorgehen) sind *keine* Inertialsysteme für die Wellengleichung. Wenn die Welle keine Wasserwelle (z.B.) ist, sondern elektromagnetischer Natur im Vakuum, dann müßte das Vakuum eben doch ein Trägermedium enthalten ("Äther"), oder die Galileitransf. ist nicht allgemein genug ($\rightarrow$ Lorentztransformation).