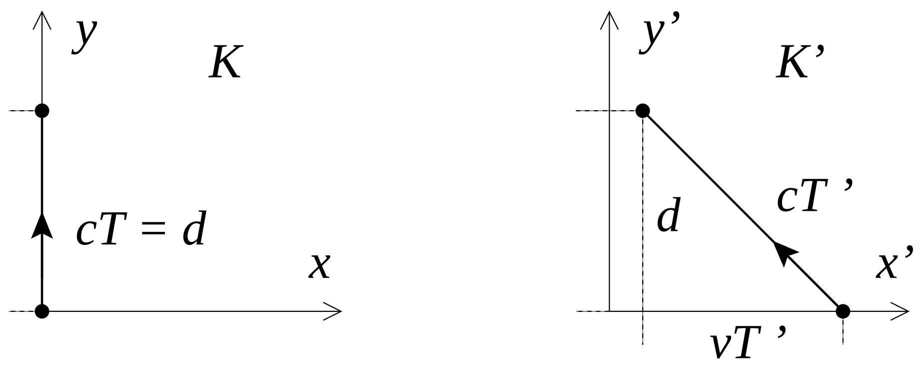
**Theorie C f. Lehramtskandidaten (WS 2004/05)**
Musterlösung Übungsblatt **10** 12.01.05

**1** **a)**




Im System$K$ : $\quad d = cT \quad \Rightarrow \quad T = d/c$

Im System$K'$ : $\quad d^2 + v^2(T')^2 = c^2(T')^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{c^2} = (T')^2[\,1 - \frac{v^2}{c^2}\,] \quad \Rightarrow \quad T^2 = (T')^2[\,1 - \frac{v^2}{c^2}\,]$

$$\Rightarrow \quad T' = \gamma\, T \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad T' > T$$

**b)** In $K$ haben wir die Ereignisse

Blitz: $(x_1, t_1) = (0, 0)$ , Detektor: $(x_2, t_2) = (0, T)$

Im bewegten System $K'$ werden diese wie folgt wahrgenommen

Blitz: $x'_1 = \gamma(x_1 - v\, t_1) = 0$ , $t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1) = 0$

Detektor: $x'_2 = -\gamma\, v\, T$ , $t'_2 = \gamma\, T$

In $K'$ wird also die Zeitdifferenz $T'$ gemessen:

$$T' = (t'_2 - t'_1) = \gamma\, T \quad , \quad \text{außerdem: } (x'_2 - x'_1) = -\gamma\, v\, T = -v\, T'$$

Letzteres entspricht auch a): Der Detektor ist in $K'$, in dessen eigener Zeit gemessen, um $v\, T'$ nach links gewandert.

**c)** (i) relativistisch:
Das bewegte System $K'$ ist die Erde (relativ zum Meson), von $K'$ aus gesehen lebt das Meson $T' = \gamma\, T = \gamma\, 2 \cdot 10^{-6}$sec.$= 2 \cdot 10^{-4}$sec. Die Reichweite ist damit $x' = v\, T'$. Dazu:

$$\gamma = 100 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1 - 10^{-2}} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad v \approx c$$

$$\Rightarrow \quad x' = c\, T' = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{sec}\, 2 \cdot 10^{-4} sec = 60\, km$$

(ii) nichtrelativistisch:
Die Lebensdauer ist jetzt in $K$ und $K'$ gleich, d.h.,

$$x' = v\, T \approx c\, T = 600\, m$$

Der Unterschied zu (i) macht deutlich, daß die Relativitätstheorie nicht ignoriert werden darf. Nur in der relativistischen Rechnung können die Mesonen die Erdoberfläche erreichen.

**2** **a)** Transformation der Ereignisse:

$$(x_1, t_1) = (0, 0) \quad \Rightarrow \quad x'_1 = \gamma(x_1 - v\, t_1) = 0 \;\; , \;\; t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1) = 0$$

$$(x_2, t_2) = (L, t) \quad \Rightarrow \quad x'_2 = \gamma(L - v\, t) \;\; , \;\; t'_2 = \gamma(t - \frac{v}{c^2} L)$$

Die Länge des Stabes wird in $K'$ als Ortsdifferenz gemessen,

$$L' = (x'_2 - x'_1) = \gamma(L - v\, t)$$

und zwar zur gleichen Zeit (durch zwei Beobachter), also gilt

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(t - \frac{v}{c^2} L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma\, t = \frac{\gamma\, v}{c^2} L$$

und damit

$$L' = \gamma\, L(1 - \frac{v^2}{c^2}) \quad \Rightarrow \quad L' = \frac{L}{\gamma} < L$$

**b)** Im Laborsystem = bewegtes System $K'$ ist $L' = 2mm$. Im mitbewegten System $K$ des Paketes ist also

$$L = \gamma\, L' = 100 \cdot 2\, mm = 0.2\, m$$

Im Ruhesystem $K$ der Limousine (Schwester etc.) ist $L = 7.50\,m$. Im relativ dazu bewegten System $K'$ des Autoinhabers (Student) gilt

$$L' = \frac{L}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{L}{L'} = \frac{7.50\,m}{5\,m} = \frac{3}{2}$$

daraus errechnet sich die Relativgeschwindigkeit der Bezugssysteme

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1 - (2/3)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.75 \quad \Rightarrow \quad v = 75\%\,c$$

Diese Geschw. erfordert sicher noch Entwicklungen in der Fahrzeugtechnik.

$\boxed{\textbf{3}}$ Transformation von $K$ nach $K''$:

$$x'' = \gamma'(x' - v'\,t') \quad , \quad x' = \gamma(x - v\,t)$$

$$t'' = \gamma'(t' - \frac{v'}{c^2}x') \quad , \quad t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$$

Ineinander einsetzen führt auf

$$x'' = \gamma\gamma'(1 + \frac{vv'}{c^2})[\,x - \frac{v + v'}{1 + vv'/c^2}\,t\,] \quad , \quad t'' = \gamma\gamma'(1 + \frac{vv'}{c^2})[\,t - \frac{1}{c^2}\frac{v + v'}{1 + vv'/c^2}\,x\,]$$

Dies ist wieder eine Lorentztransformation, mit einer Gesamt-Relativgeschwindigkeit von $K$ und $K''$, die nicht einfach die Summe $v + v'$ ist, sondern

$$K \to K'': \quad v'' = \frac{v + v'}{1 + vv'/c^2} \quad \Rightarrow \quad \gamma'' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v'')^2/c^2}}$$

Allerdings muß dazu das angebene $\gamma''$ auch tatsächlich als Vorfaktor in $x''$ und $t''$ auftauchen, also

$$\gamma\gamma'(1 + \frac{vv'}{c^2}) = \gamma''$$

Test:

$$\gamma^2\,\gamma'^2\,(1 + \frac{vv'}{c^2})^2 = \gamma''^2 \quad \Rightarrow$$

$$(1 - \frac{v^2}{c^2})(1 - \frac{v'^2}{c^2}) = (1 + \frac{vv'}{c^2})^2\,(1 - \frac{v''^2}{c^2})$$

Zur Vereinfachung messen wir alle Geschwindigkeiten in Einheiten von $c$, also

$$\frac{v}{c} \equiv v \quad , \quad \frac{v'}{c} \equiv v' \quad , \quad \frac{v''}{c} \equiv v'' = \frac{v + v'}{1 + vv'}$$

damit

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad (1-v^2)(1-v'^2) &= (1+vv')^2\,(1-\frac{(v+v')^2}{(1+vv')^2}) \\
&= (1+vv')^2-(v+v')^2 \\
\Rightarrow \quad 1-v^2-v'^2+(vv')^2 &= 1-v^2-v'^2+(vv')^2 \quad \Rightarrow \quad \surd
\end{aligned}
$$