

1 a) Von K aus gesehen:

Zur Zeit $t = t_1$: Auto bei x_1 ,

zur Zeit $t = t_2 > t_1$: Auto bei $x_2 < x_1$, $(x_1 - x_2) = v(t_2 - t_1) \equiv vT$.

Bei $x = 0$ in K : Laufzeit der Lichtblitze:

1. Blitz kommt zur Zeit $t'_1 = (t_1 + \frac{x_1}{c})$ an;

2. Blitz kommt zur Zeit $t'_2 = (t_2 + \frac{x_2}{c}) = (t_1 + T + \frac{x_2}{c})$ an;

$\Rightarrow$ Blitzintervall bei $x = 0$:

$$T' = t'_2 - t'_1 = T + \frac{1}{c}(x_2 - x_1) = T(1 - \frac{v}{c})$$

“Bewegte Uhren gehen langsamer”:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > T_0 \quad \Rightarrow \quad T' = T_0 \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = T_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad \Rightarrow \quad \omega'_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

b) Wellenfront in K : $\phi = kx - \omega t$;

Wellenfront in K' : $\phi' = \phi = k'x' - \omega't'$.

Lorentztransformation der Koordinaten x, t von K nach K' (Blatt 10 unten):

$$x' = \gamma(x - vt) \quad , \quad t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Phase in K' :

$$\phi' = k'x' - \omega't' = \gamma k'(x - vt) - \gamma \omega'(t - \frac{vx}{c^2}) = (\gamma k' + \gamma \omega' \frac{v}{c^2})x - (\gamma k'v + \gamma \omega')t$$

Gleichsetzen mit $\phi = kx - \omega t$ liefert

$$k = \gamma(k' + \frac{v\omega'}{c^2}) \quad , \quad \omega = \gamma(\omega' + k'v)$$

Dies läßt sich nach k', ω' auflösen,

$$\Rightarrow \quad k' = \gamma(k - \frac{v\omega}{c^2}) \quad , \quad \omega' = \gamma(\omega - kv)$$

Die Transformation $k, \omega \rightarrow k', \omega'$ ist analog zu der von x, t , die Rücktransformation ist (wie auch bei x, t) durch $v \rightarrow -v$ gegeben. Man sagt: $(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$ bildet einen “4er-Vektor”, da er das gleiche Transformationsverhalten wie $(ct, \mathbf{x})$ aufweist.

2 a) Im System $K_D = \text{Erde}$: Thomas braucht für den Hinflug zum Planeten in 8 Lichtjahren Entfernung, von Dieter aus gesehen, die Zeit $\frac{x}{v} = \frac{8 \cdot c \cdot \text{Jahre}}{0.8c} = 10 \text{ Jahre}$. Bis zum Umkehrpunkt ist also Dieter, nach seiner Uhr, um $T_D = 10 \text{ Jahre}$ älter geworden, bei der Landung also $2T_D = 20 \text{ Jahre}$.

Im System $K_T = \text{Raumschiff}$: "Bewegte Uhren gehen langsamer", also

$$T_D = \gamma T_T, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = \frac{1}{0.6} \Rightarrow T_T = 0.6 T_D = 6 \text{ Jahre}$$

Also ist Thomas bei der Landung um (nur) 12 Jahre gealtert.

Ein Paradoxon könnte sich ergeben, wenn man Dieter als relativ zu Thomas bewegtes Bezugssystem betrachtet. Dann müssten sich die Werte für die vergangene Zeit von Dieter und Thomas gerade austauschen, also einen Widerspruch ergeben! Allerdings befindet sich Thomas nur zeitweise, nämlich *nicht* in den Beschleunigungsphasen, in einem Inertialsystem.

b) Da jeder nach der eigenen Uhr an jedem Jahrestag einen Blitz absendet, sind dies für Dieter: Hinflugphase: 10 Blitze, Rückflugphase: 10 Blitze;
Thomas: Hinflugphase: 6 Blitze, Rückflugphase: 6 Blitze;
(Den Dopplereffekt braucht man erst in c), sorry.)

c) Thomas empfängt nach Doppler (bzw. Aufg. 1) die Impulse von Dieter mit einer Rate von

$$\nu' = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \frac{1}{\text{Jahr}} = \sqrt{\frac{1 - 0.8}{1 + 0.8}} \frac{1}{\text{Jahr}} = \sqrt{\frac{1}{9}} \frac{1}{\text{Jahr}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\text{Jahr}}$$

Bis zum Umkehrpunkt nach 6 (Thomas-) Jahren kommen also 2 Impulse bei ihm an.

Danach, bis zur Landung, empfängt Thomas die (Geistes-) Blitze von Dieter mit der Rate

$$\nu' = \sqrt{\frac{1 + 0.8}{1 - 0.8}} \frac{1}{\text{Jahr}} = \frac{3}{\text{Jahr}}$$

er sieht also in den zweiten 6 Jahren seiner Reise 18 Blitze von Dieter. Insgesamt hat Thomas damit 20 Blitze erhalten; genau so viel, wie von Dieter gesendet (!).

Dieter empfängt von Thomas während der Hinflugphase mit der Rate

$$\nu'' = \frac{1}{3} \frac{1}{\text{Jahr}}$$

Die 6 Impulse, die Thomas bis zum Umkehrpunkt absendet, sind also nach $3 \cdot 6 = 18$ Dieter-Jahren auf der Erde angekommen. Anders gesehen: Am Umkehrpunkt schickt Thomas den letzten der 6 Impulse los, der für die Strecke von 8 Lichtjahren eben 8 Jahre braucht (in Dieters Bezugssystem), also am Ende des 18. Dieter-Jahrs bei Dieter ankommt.

Ab dem Umkehrpunkt gehen Thomas' Impulse mit der Rate $\nu'' = 3/\text{Jahr}$ bei Dieter ein, das heißt, Dieter empfängt in den restlichen 2 Jahren bis zur Landung gerade $2 \cdot 3$ Impulse, also alle in der Rückflugphase gesendeten. Insgesamt wurden also alle 12 gesendeten Impulse auch empfangen.

Die Verteilung der Impulse auf Hin- und Rückflug macht die Asymmetrie der Bezugssysteme von Dieter und Thomas deutlich. Es "fehlt" auch keine Zeit, alle gesendeten Impulse sind ja bis zur Landung angekommen. Man beachte, daß wegen $|v| < c$ alle Impulse in der *Reihenfolge* empfangen werden, in der sie gesendet wurden (Kausalität).

3 Zunächst: welche Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ ist im Parkplatz-System K die richtige?

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \quad u_y = \frac{c}{2}$$

u_x ist jetzt egal, das Paket wird früher oder später K'_2 treffen. Wenn $|\mathbf{u}| = \frac{3}{4}c$ vorgegeben sein soll, folgt

$$|\mathbf{u}|^2 = u_x^2 + u_y^2 \Rightarrow u_x = \sqrt{(3/4)^2 - (1/2)^2} c = \frac{\sqrt{5}}{4} c$$

Für $\mathbf{u}'$ im System K'_1 des Werfers brauchen wir das Additionstheorem:

$$u'_y = \frac{u_y - v}{1 - u_y v / c^2} = \frac{c/2 + c/2}{1 + \frac{c}{2} \frac{c}{2} \frac{1}{c^2}} = \frac{4}{5} c$$

$$u'_x = \frac{u_x}{1 - u_y v / c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = u_x \frac{\sqrt{1 - (1/2)^2}}{1 + 1/4} = u_x \frac{4}{5} \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{20}} c$$

Das ergibt den Betrag und die Richtung (Winkel α zur x -Achse)

$$|\mathbf{u}'| = \sqrt{0.79} c = 0.9 c, \quad \tan(\alpha) = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{8}{\sqrt{15}}$$

Hätte man naiv die Geschwindigkeiten addiert, müßte K'_1 mit $u'_y = -c$ werfen, der Betrag von $\mathbf{u}'$ würde damit c übersteigen!