Universität Karlsruhe WS 2004/2005
Institut für Theoretische Teilchenphysik
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Dr. Robert Harlander, Dr. Jan Brinckmann **19.01.05**
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre robert.harlander@cern.ch janbri@tkm.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 12 zur Theorie C für Lehramtskandidaten

1 Energie- und Impulserhaltung:
Ein Teilchen mit der Ruhemasse m_0, das sich gleichförmig mit dem Impuls $\mathbf{p}$ bewegt, hat die Energie $E = \sqrt{(m_0\,c^2)^2 + \mathbf{p}^2\,c^2}$. Bei Stoß- und Zerfallsvorgängen mit mehreren Teilchen ist die Summe aller Energien und die Summe aller Impulse erhalten.

a) Ein π^+-Meson mit der Ruhemasse $m_\pi c^2 = 139.6\,\mathrm{MeV}$ befindet sich in Ruhe. Es zerfällt in ein μ^+-Meson mit Ruhemasse $m_\mu c^2 = 105.7\,\mathrm{MeV}$ und ein Neutrino mit Ruhemasse $m_\nu = 0$. Bestimmen Sie Impulse (Richtung und Betrag) und Energien der beim Zerfall entstehenden Teilchen.

b) Ein π^0-Meson mit der Ruhemasse $m_0 c^2 = 135\,\mathrm{MeV}$ befindet sich in Ruhe. Es zerfällt in zwei Photonen mit $m_\gamma = 0$. Welche Energien E_1, E_2 haben die Photonen?

c) Nun bewegt sich das π^0-Meson gleichförmig mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, seine Energie beträgt $E_\pi = 426\,\mathrm{MeV}$.
Bestimmen Sie die Energien der emittierten Photonen für den Fall, daß E_1 maximal und E_2 minimal wird (oder umgekehrt).

2 Nichtrelativistischer Grenzfall:
Gewinnen Sie über eine geeignete Reihenentwicklung in v die entsprechenden nichtrelativistischen Ausdrücke aus $\mathbf{p} = \dfrac{m_0\,\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, $E = \sqrt{(m_0\,c^2)^2 + (p\,c)^2}$.

3 Quantenmechanik:
Wir betrachten ein Teilchen der Masse m (nichtrelativistisch), das sich auf der x-Achse in einem Potential $V(x)$ bewegen kann. Der Bewegungszustand des Teilchens wird nun nicht mehr durch Ort x und Impuls p angegeben, sondern durch einen *Zustand* mit einer Bestimmten Energie E. Der Zustand wird durch eine "Wellenfunktion" $\Psi(x)$ charakterisiert, die der Schrödinger-Gleichung genügt:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi(x) = E\,\Psi(x)$$

a) Das Potential sei $V(x) = 0$ für $0 \le x \le L$ und $V(x) = +\infty$ für $x < 0$ oder $x > L$ (unendlich tiefer Potentialtopf). Für $x < 0$ oder $x > L$ ist damit $\Psi(x) = 0$, wir brauchen also nur $0 \le x \le L$ betrachten.
Nehmen Sie an, E sei gegeben, und bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\Psi(x)$ für $0 \le x \le L$. [Die Gleichung läßt sich leicht auf eine bekannte Form bringen.]

b) Gewinnen Sie daraus die speziellen Lösungen $\Psi_n(x)$, die den Randbedingungen $\Psi(0) = 0$, $\Psi(L) = 0$ genügen. Welche Energien E_n kann das Teilchen demnach annehmen?

c) Die Wahscheinlichkeit $w(x)$, das Teilchen am Ort x anzutreffen, ist durch $w(x) = |\Psi(x)|^2$ gegeben. Geben Sie $w_n(x)$ für die Ψ_n aus b) an (Skizze!), und zeigen Sie, daß die Ψ_n die Bedingung $\int_0^L \mathrm{d}x\, w_n(x) = 1$ erfüllen können. Welche Bedeutung hat diese Bedingung?

— Besprechung in den Übungsgruppen ab Dienstag, 25.01.05 —