Theorie C f. Lehramtskandidaten (WS 2004/05)

Musterlösung Übungsblatt **12** 26.01.05

$\boxed{1}$ **a)**

vorher: $E = m_\pi c^2 \quad , \quad \mathbf{p} = 0$

nachher: $E' = \sqrt{(m_\mu c^2)^2 + (\mathbf{p}_\mu c)^2} + |\mathbf{p}_\nu|\, c \quad , \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p}_\nu + \mathbf{p}_\mu$

Impulserhaltung: $\mathbf{p}_\nu = -\mathbf{p}_\mu$, ansonsten ist Richtung beliebig $\leftrightarrow p_\nu = p_\mu\,,\ \ p \equiv |\mathbf{p}|\,.$

Energieerhaltung:

$$m_\pi c^2 - p_\mu c = \sqrt{(m_\mu c^2)^2 + (p_\mu c)^2} \quad \Rightarrow \quad (m_\pi c^2)^2 - 2(m_\pi c^2)(p_\mu c) = (m_\mu c^2)^2$$

$$\Rightarrow \quad p_\mu c = \frac{(m_\pi c^2)^2 - (m_\mu c^2)^2}{2\,(m_\pi c^2)} = \frac{(139.6)^2 - (105.7)^2}{2\,(139.6)}\mathrm{MeV} = 29.8\,\mathrm{MeV}$$

Damit:

$$E_\nu = p_\nu c = p_\mu c = 29.8\,\mathrm{MeV} \quad ,$$

$$E_\mu = \sqrt{(m_\mu c^2)^2 + (p_\mu c)^2} = 109.8\,\mathrm{MeV}$$

b)

vorher: $E = m_0 c^2 \quad , \quad \mathbf{p} = 0$

nachher: $E' = p_1 c + p_2 c \quad , \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$

Impulserhaltung: $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_2 \equiv p$

Energieerhaltung: $m_0 c^2 = 2\,pc \quad \Rightarrow \quad pc = \dfrac{1}{2} m_0 c^2$

$$\Rightarrow \quad E_1 = E_2 = \frac{1}{2} m_0 c^2 = 67.5\,\mathrm{MeV}$$

c)

vorher: $E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (pc)^2} = 426\,\mathrm{MeV} \quad , \quad \mathbf{p} = p\,\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

nachher: $E' = E_1 + E_2 = p_1 c + p_2 c \;\; , \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$

E_1 und E_2 sind maximal unterschiedlich, wenn $\mathbf{p}_1 || \mathbf{p}$ und $\mathbf{p}_2 || (-\mathbf{p})$ oder umgekehrt. Dann gilt:

Impulserhaltung: $p = p_1 - p_2 \quad \Rightarrow \quad pc = E_1 - E_2$

Energieerhaltung: $E = E_1 + E_2$

Auflösen ergibt

$$E_{1/2} = \frac{1}{2}[\, E \pm (pc)\,] \;\; , \quad (pc) = \sqrt{(E)^2 - (m_0 c^2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad E_{1/2} = \frac{E}{2}\left[\, 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E}\right)^2}\;\right] = \frac{1}{2}\, 426\,\mathrm{MeV}\left[\, 1 \pm \underbrace{\sqrt{1 - (135/426)^2}}_{=\sqrt{0.9}}\;\right]$$

$$\Rightarrow \quad E_1 = 415\,\mathrm{MeV} \;\; , \quad E_2 = 11\,\mathrm{MeV}$$

$\boxed{2}$ Nichtrelativistisch: $v \ll c$: Entwickeln der Wurzelausdrücke nach Bronstein:

$$\mathbf{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\mathbf{v} \;\; , \quad \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + (\sim v^4) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} + (\sim v^3)$$

$$E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (pc)^2} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_0^2 c^2} + (\sim p^4)\right)$$

$$\Rightarrow \quad E = m_0 c^2 + \frac{p^2}{2 m_0} + (\sim p^4) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + (\sim v^4)$$

$\boxed{3}$ <u>a)</u>

$$0 \le x \le L \; : \quad \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\partial_x^2 - E\right)\Psi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\partial_x^2 + \frac{2mE}{\hbar^2}\right)\Psi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Oszillator!}$$

Ansatz:

$$\Psi(x) = e^{ikx} \quad \Rightarrow \quad (k^2 - \frac{2mE}{\hbar^2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi(x) = A\, e^{ikx} + B\, e^{-ikx} \;\; , \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \ge 0$$

b) Außerhalb des Bereiches $0 \leq x \leq L$ ist das Potential $+\infty$, und daher bleibt dort nur die triviale Lösung $\Psi(x) = 0$. Die Wellenfunktion muß an den Sprungstellen des Potentials stetig sein, also muß die allgemeine Lösung aus a) auf die Randbedingungen

$$\Psi(0) = \Psi(L) = 0$$

spezialisiert werden:

$$\Rightarrow \quad A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A(e^{ikL} - e^{-ikL}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(k\,L) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = k_n = \frac{n\,\pi}{L}$$

mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ (es war ja $k \geq 0$). Damit lauten die speziellen Lösungen

$$\Psi_n(x) = (2iA)\sin(k_n\,x) = C\,\sin(n\pi\frac{x}{L}) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$n = 0$ ist nicht zugelassen, weil triviale Lösung (die nicht normierbar ist, s.u.). $n < 0$ fehlt auch, weil die Lösungen nicht linear unabhängig zu denen mit $m > 0$ wären.

C ist eine komplexe Konstante, die offenbar (zunächst) unbestimmt bleibt.

Die Ψ_n sind die Zustände (Wellenfunktionen), die das Teilchen in dem Potentialeimer annehmen kann. Diese Zustände haben jeweils eine feste Energie, nämlich

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \Rightarrow \quad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$$

c) Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen am Ort x bei einer Ortsmessung anzutreffen, ist durch $w(x) = |\Psi(x)|^2$ gegeben, wenn das Teilchen sich gerade im Zustand Ψ befindet. [Genauer: w ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, denn $w(x)\,\mathrm{d}x$ ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im kleinen Bereich $\mathrm{d}x$ anzutreffen.]

Für die möglichen Zustände im Potentialtopf gilt also

$$w_n(x) = |\Psi_n(x)|^2 = |C|^2 \sin^2(k_n\,x)$$

Die Bedingung

$$\int_0^L \mathrm{d}x\,w_n(x) = |C|^2 \int_0^L \mathrm{d}x\,\sin^2(n\pi\frac{x}{L}) = |C|^2\frac{L}{n\pi}\underbrace{\int_0^{n\pi}\mathrm{d}\varphi\,\sin^2(\varphi)}_{=\frac{1}{2}n\pi} = \frac{1}{2}|C|^2 L = 1$$

sagt aus, daß die Wahrscheinlichkeit, daß Teilchen überhaupt irgendwo zu finden, gleich 1 sein muß ($\leftrightarrow$ Normierung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\leftrightarrow$ Erhaltung der Teilchenzahl $\leftrightarrow$ Erhaltung der Masse). Von daher ist die übriggebliebene Konstante C absolut notwendig, um durch geeignete Wahl diese Bedingung erfüllen zu können:

$$|C|^2 = \frac{2}{L} \quad , \quad C := \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Die Phase der komplexen Zahl C bleibt immer noch unbestimmt und frei wählbar; das ist bei allen Wellenfunktionen der Fall.