Universität Karlsruhe
Institut für Theoretische Teilchenphysik
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Dr. Robert Harlander, Dr. Jan Brinckmann
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre robert.harlander@cern.ch janbri@tkm.uni-karlsruhe.de

WS 2004/2005

**26.01.05**

# Übungsblatt Nr. 13 zur Theorie C für Lehramtskandidaten

**1 4er Geschwindigkeit:**
Im Inertialsystem $K$ bewegt sich eine Billiardkugel mit der Geschwindigkeit $u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ entlang der $x$-Achse. In einem relativ zu $K$ gleichförmig mit $v$ entlang der $x$-Achse bewegten System $K'$ wird für die Geschwindigkeit der Kugel $u' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$ gemessen.

**a)** Bestimmen Sie $u'$ über die Lorentztransformation der Koordinaten $(x, t)$ (siehe Blatt 10 unten). Ergebnis: $u' = \dfrac{u - v}{1 - uv/c^2}$ .

**b)** Für eindimensionale Bewegungen entlang der $x$-Achse hat die "4er Geschwindigkeit" $u^\mu$ nur zwei Komponenten $\mu = 0, 1$ ; diese sind definiert durch
$$u^\mu = (u^0, u^1) \ , \quad u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \ , \quad u^1 = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} .$$
Zeigen Sie, daß die $u^\mu$ der Lorentztransformation für beliebige 4er Vektoren $a^\mu$ genügen,
$$a'^1 = \gamma(a^1 - \frac{v}{c}a^0) \ , \quad a'^0 = \gamma(a^0 - \frac{v}{c}a^1) \ , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

**2 Materiewelle:**
Die Wellenfunktion $\Psi(x)$ eines freien Teilchens der Masse $m$ und Energie $E$ erfüllt die Schrödinger-Gleichung: $\frac{-\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi(x) = E\,\Psi(x)$ . Wie lautet die allgemeine Lösung; was ist der Zusammenhang zwischen der de Broglie-Wellenlänge $\lambda$ , Energie $E$ und Impuls $p$ des Teilchens?

**3 Reflektion einer Materiewelle:**
Wird das freie Teilchen an einer Potentialwand reflektiert, so lautet die Schrödinger-Gleichung:
$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right]\Psi(x) = E\,\Psi(x) \quad \text{mit dem Potential} \quad V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 > 0 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

**a)** Geben Sie für festes $E$ die allgemeine Lösung $\Psi_<(x)$ für den Bereich $x < 0$ an, als auch die Lösung $\Psi_>(x)$ für den Bereich $x \geq 0$ . Es sei $0 < E < V_0$ .

**b)** Eine physikalische Wellenfunktion muß den sog. Anschlußbedingungen $\Psi_<(x)|_{x=0} = \Psi_>(x)|_{x=0}$ und $\partial_x\Psi_<(x)|_{x=0} = \partial_x\Psi_>(x)|_{x=0}$ und außerdem noch $\Psi_>(x)|_{x\to\infty} < \infty$ genügen. Wie lautet damit $\Psi(x)$ für $-\infty < x < \infty$ ?
Wo könnten die Anschluß- und Randbedingungen herkommen?

**c)** Welche Energien $E$ sind möglich? Bestimmen und skizzieren Sie $\Psi(x)$ für $E = V_0/2$ . Diskutieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x) = |\Psi(x)|^2$ . Welches Ergebnis hätten Sie nach der klassischen Mechanik erwartet?

**4 Unschärfe:**
Die erlaubten Wellenfunktionen eines Teilchens im Potentialtopf von Blatt 12, Aufg. 3 lauten $\Psi(x) = C\,\sin(k_n\,x)$ , $k_n = n\pi x/L$ , $n = 1, 2, 3, \ldots$ , $C = \sqrt{2/L}$ .

**a)** Wird die Ortsmessung an vielen gleichartigen Potentialtöpfen wiederholt, so kann man den Mittelwert $\langle x\rangle$ und das Schwankungsquadrat $(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - (\langle x\rangle)^2$ bestimmen. Berechnen Sie $\Delta x$ aus der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x) = |\Psi(x)|$ , also über $\langle x^m\rangle = \int_0^L \mathrm{d}x\, x^m\, w(x)$ .

**b)** Für den Impuls kann man ganz analog $(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - (\langle p\rangle)^2$ berechnen, allerdings muß man die Vorschrift $\langle p^m\rangle = (\frac{\hbar}{i})^m \int_0^L \mathrm{d}x\, \Psi^*(x)\frac{\partial^m}{\partial x^m}\Psi(x)$ , $m = 1, 2$ verwenden.
Man berechne $\langle p\rangle$ und $\Delta p$ und vergleiche mit der Heisenbergschen Unschärferelation.

— Besprechung in den Übungsgruppen ab Dienstag, 01.02.05 —