Theorie C f. Lehramtskandidaten (WS 2004/05)
Musterlösung Übungsblatt **13** 02.02.05

$\boxed{1}$ **a)** Lorentztransformation der Koordinaten: $K \to K'$:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad , \quad t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Gegeben ist $u = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, gesucht ist $u' = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$, Kettenregel:

$$u' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \gamma\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} - \gamma v\left(\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}$$

dazu:

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\gamma\frac{v}{c^2} + \gamma\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma}\frac{u}{1 - vu/c^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \gamma - \gamma\frac{v}{c^2}u \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{1 - vu/c^2}$$

$$\Rightarrow \quad u' = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}$$

b) Es oll gelten:

$$u'^1 = \gamma(u^1 - \frac{v}{c}u^0) \quad , \quad u'^0 = \gamma(u^0 - \frac{v}{c}u^1)$$

mit

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad , \quad u^1 = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \text{also} \quad u'^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - (u')^2/c^2}} \quad , \quad u'^1 = \frac{u'}{\sqrt{1 - (u')^2/c^2}}$$

Im Nenner steht u bzw. u', *nicht* v!

Dies einsetzen $\Rightarrow$

$$u'^1 = \frac{u - v}{(1 - vu/c^2)\sqrt{1 - (u')^2/c^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}(u - v)$$

und

$$u'^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - (u')^2/c^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}(c - \frac{vu}{c})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-(u')^2/c^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{1-u^2/c^2}}(1-\frac{vu}{c^2})$$

Beide Gleichungen sind erfüllt, falls

$$\begin{aligned}
(1-\frac{uv}{c^2})\sqrt{1-(u')^2/c^2} &= \sqrt{1-u^2/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2} \\
\Rightarrow \quad (1-\frac{uv}{c^2})^2(1-(u')^2/c^2) &= (1-u^2/c^2)\,(1-v^2/c^2) \\
\Rightarrow \quad (1-\frac{uv}{c^2})^2(1-\frac{(u-v)^2/c^2}{(1-uv/c^2)^2}) &= (1-u^2/c^2)\,(1-v^2/c^2) \\
\Rightarrow \quad (1-\frac{uv}{c^2})^2 - (\frac{u}{c}-\frac{v}{c})^2 &= (1-\frac{u^2}{c^2})\,(1-\frac{v^2}{c^2}) \\
\Rightarrow \quad 0 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \surd
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Die allgemeine Lösung hatten wir ja schon:

$$\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad , \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad , \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Die Wellenlänge dieser Welle ist die de Broglie-Wellenlänge, also

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$

Impuls: klassisch ist die Energie gegeben durch $E = \frac{p^2}{2m}$, der Impuls also durch

$$p = \sqrt{2mE} = \hbar\, k = \frac{h}{\lambda}$$

Genaugenommen muß man dazu annehmen, daß die Wellenfunktion $\Psi(x)$ zu fester Energie auch eine Wellenfunktion zu festem Impuls ist. Das ist nicht notwendig der Fall, hier aber schon.

$\boxed{3}$ **a)**

$$x < 0 : \quad \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\partial_x^2 - E\right]\Psi_<(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Psi_<'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\Psi_< = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_<(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad , \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$x \geq 0 : \quad \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + (V_0 - E)\right]\Psi_>(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_>'' - \underbrace{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}_{>0\ (!)}\Psi_> = 0$$

Der übliche Ansatz:

$$\Psi_>(x) = e^{ik'x} \quad \Rightarrow \quad k' = \pm \frac{i}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}$$

$$\Rightarrow \quad \Psi_>(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x} \quad , \quad \kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)} > 0$$

b) Anschlußbedingungen:

$$\begin{aligned}
\Psi_>(x \to \infty) < \infty \quad &\Rightarrow \quad C = 0 \\
\Psi_<(0) = \Psi_>(0) \quad &\Rightarrow \quad A + B = D \\
\Psi'_<(0) = \Psi'_>(0) \quad &\Rightarrow \quad ik(A - B) = -\kappa D \quad \Rightarrow \quad A - B = i\frac{\kappa}{k}D
\end{aligned}$$

Eliminiere damit *z.B.* A und B:

$$A = D\frac{1}{2}(1 + i\frac{\kappa}{k}) \quad , \quad B = D\frac{1}{2}(1 - i\frac{\kappa}{k})$$

Damit liegt auch $\Psi(x)$ fest, bis auf eine verbleibende Konstante D.

c) Im Gegensatz zum Potentialtopf sind hier alle Energien und damit k-Werte möglich (innerhalb $0 < E < V_0$). Für $E = V_0/2$ vereinfacht sich alles etwas:

$$E = V_0/2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar} \quad , \quad \kappa = k \quad \Rightarrow \quad A = \frac{D}{2}(1 + i) \quad , \quad B = \frac{D}{2}(1 - i)$$

$$\Rightarrow \quad \Psi_<(x) = \frac{D}{2}[\,2\cos(kx) - 2\sin(kx)\,] = D\sqrt{2}\cos(kx + \frac{\pi}{4})$$

und damit

$$\Psi(x) = \sqrt{2}D[\,\cos(kx + \pi/4)\,\Theta(-x) + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-kx}\,\Theta(x)\,]$$

Der cos links von 0 und der exponentielle Abfall treffen sich bei $x = 0$ beim Wert $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Klassisch würde das Teilchen bei $x = 0$ seinen Impuls umdrehen (elastischer Stoß), aber natürlich nicht in die Wand eindringen. Quantenmechanisch ist das möglich, wenn auch die Aufenthaltswahrscheinlichkeit schnell abfällt ($\rightarrow$ Tunneleffekt).

4 **a)**

$$\langle x^m \rangle = \int_0^L \mathrm{d}x\, x^m\, |\Psi(x)|^2 = \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\, x^m\, \sin^2(n\pi\frac{x}{L}) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Hier wird nur $m = 1, 2$ benötigt.

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)) \quad , \quad \varphi = 2n\pi\frac{x}{L} \quad \Rightarrow \quad \langle x^m \rangle = \frac{1}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\, x^m - \frac{L^m}{(2\pi n)^{m+1}}\int_0^{2\pi n} \mathrm{d}\varphi\, \varphi^m\, \cos(\varphi)$$

Laut Bronstein ist

$$\int_0^{2\pi n} \mathrm{d}\varphi\, \cos(\varphi) = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi n} \mathrm{d}\varphi\, \varphi\, \cos(\varphi) = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi n} \mathrm{d}\varphi\, \varphi^2\, \cos(\varphi) = 4\pi n$$

und damit ergibt sich (das erste Integral in $\langle x^m \rangle$ ist ja $L^m/(m+1)$)

$$\begin{aligned} \langle x^0 \rangle &= \langle 1 \rangle = (L^0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \surd \\ \langle x \rangle &= \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{wie erwartet} \\ \langle x^2 \rangle &= \frac{L^2}{3} - 4\pi n\frac{L^2}{(2\pi n)^3} = L^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}\right) \end{aligned}$$

Die Schwankung bei Ortsmessungen an einem Ensemble ist also

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - (\langle x \rangle)^2} = L\sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}\right) - \frac{1}{4}} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2 n^2}}$$

b)

$$\langle p \rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\, \sin(n\pi\frac{x}{L})\,\frac{n\pi}{L}\,\cos(n\pi\frac{x}{L}) = \frac{\hbar}{i}\frac{2}{L}\int_0^{n\pi} \mathrm{d}\phi\, \sin(\phi)\,\cos(\phi) = 0 \quad , \quad \phi = n\pi\frac{x}{L}$$

$$\langle p^2 \rangle = \hbar^2\frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\, \sin(n\pi\frac{x}{L})\,\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin(n\pi\frac{x}{L}) = \hbar^2\frac{2}{L}\frac{n\pi}{L}\underbrace{\int_0^{n\pi} \mathrm{d}\phi\, \sin^2(\phi)}_{= n\pi/2} = \hbar^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \hbar^2(k_n)^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - (\langle p \rangle)^2} = \hbar|k_n| = \hbar\frac{n\pi}{L}$$

Unschärfe:

$$\Delta p \cdot \Delta x = \frac{\hbar}{2}\underbrace{n\pi\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2 n^2}}}_{\geq 1.136 > 1} > \frac{\hbar}{2} \quad \Rightarrow \quad \surd \qquad \text{mit} \quad n \geq 1$$