Theorie C f. Lehramtskandidaten (WS 2004/05)
Musterlösung Übungsblatt **14** 09.02.05

$\boxed{\mathbf{1}}$ Die δ-"Funktion" ist definiert über ihre Wirkung in einem Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\, \delta(x-x') = f(x')$$

Man kann die δ-Funktion allerdings über den Grenzwert einer stetigen Funktion "darstellen", siehe z.B. Blatt 1.

Die 3dimensionale δ-Funktion ist

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \equiv \delta(x-x')\, \delta(y-y')\, \delta(z-z')$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

Kartesische Koordinaten: $\mathrm{d}^3r = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$

Zylinderkoordinaten: $\mathrm{d}^3r = \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}z$

Kugelkoordinaten: $\mathrm{d}^3r = r^2\, \mathrm{d}r\, \sin(\theta)\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) Gaußsches Gesetz $\displaystyle\int_{\partial V} \mathbf{E}\, \mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} q\,,\quad q = \int_V \mathrm{d}^3r\, \rho(\mathbf{r})$ anwenden; das ist am einfachsten!

(2) Poisson-Gleichung $\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r})$ lösen (erfordert Laplace-Operator in Kugelkoordinaten) und dann ableiten, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.

(3) Die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung (siehe z.B. Blatt 2, Aufg. 4) einsetzen und ableiten.

(4) Die Maxwell-Gleichungen $\nabla\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\,,\ \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$ direkt lösen. (Über den Gaußschen Satz ist dies äquivalent zu (1); steng genommen muß man aber $\nabla\times\mathbf{E} = 0$ trotzdem nachprüfen oder im Ansatz berücksichtigen.)

(5) Die Greensche Funktion $G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ verwenden; das führt aber direkt auf (3).

Potential und Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung entsprechen dem einer Punktladung: Mittelpunkt der Ladungsverteilung im Ursprung: $\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}|}\ ,\quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\,.$

4 Das Potential folgt aus der Poisson-Gleichung.

Die Greensche Funktion ist durch $\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ bestimmt. Die allgemeine Lösung lautet $G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Für beliebiges $\rho(\mathbf{r})$ ist das Potential dann gegeben durch $\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3r'\, G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\rho(\mathbf{r}')$. Das E-Feld dann durch ableiten.

Dahinter steckt das Superpositionsprinzip: Das Potential von ρ wird durch das einzelner Punktladungen zusammengesetzt, die Greensche Funktion ist ja nix anderes als das Potential einer Punktladung.

5 Das Potential einer Punktladung im Inneren des Hohlraumes über die Methode der Spiegelladung. Damit ist dann auch die Greensche Funktion im Innenraum bekannt.

Das Potential einer ausgedehnten Ladungsverteilung durch Superposition, siehe oben.

6 Definition der Multipolmomente: siehe Blatt 4, Aufg. 1 .

Die Multipolentwicklung (siehe z.B. Musterlösung 4, Aufg. 1b) ist eine Entwicklung in $1/r$ und setzt voraus, daß der Abstand von der Ladung groß ist gegen die Ausdehnung der Ladungsverteilung.

7 Bestimmung des Magnetfeldes: in der Praxis eigentlich nur über das Ampèresche Gesetz (siehe Blatt 4, Aufg. 3).

Für das generische Beispiel eines unendlich langen Drahtes ergibt sich $\mathbf{B} = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

8 Allgemeine Definition des magnetischen Dipolmomentes: siehe Blatt 5, Aufg. 2 .

Für eine beliebig geformte Leiterschleife in der x-y-Ebene wurde in der Vorlesung (und für Beispiele in Blatt 5, Aufg. 2) hergeleitet: $\mathbf{m} = \mathbf{e}_z\, I\, F$ mit der vom Strom I umschlossenen Fläche F .

9 Eine Spannung wird durch Veränderung des Flusses induziert: $U = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi$; also entweder durch Verändern des B-Feldes oder der vom Leiter im B-Feld umschlossenen Fläche.

Für die Richtung von U am Voltmeter muß man das Induktionsgesetzt (Blatt 5, Aufg. 3) genau angucken und überlegen, wie man den Normalenvektor der umlaufenen Fläche und den Umlaufsinn des Wegintegrals gemäß der rechte-Hand-Regel festlegt.

10 Siehe Blatt 6, Aufg. 1 .

11

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Eichtransformation:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\phi$$

Dies verändert E und B nicht.

12 Die Maxwell-Gleichungen führen auf $\mathbf{E} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{k}$.

Ebene Welle:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)} \quad , \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$$

Dies ist allerdings nicht die allgemeine Lösung.
E und B sind hier komplex, der physikalische Anteil wird durch Bilden des Realteils gewonnen.

13 Siehe Blatt 7, Aufg. 2.

14 Zunächst muß man das zeitabhängige elektrische Dipolmoment bestimmen und in die Formeln auf Blatt 8, Aufg. 1 einsetzen. Aus den Potentialen (zeitabhängig!) dann durch Ableiten die Felder.

Die Rechnung ist aufwändig (siehe Blatt 8). Man sollte sich das qualitative Ergebnis merken (wird gerne im Vordiplom gefragt, falls man eines machen muß):
Die Abstrahlung, d.h., Amplitude von E und B ist an den Polen (auf der z-Achse, Schwingungsrichtung der oszillierenden Ladung) null, am Äquator (in der x-y-Ebene) maximal (Strahlungscharakteristik der Antenne).
Die Amplitude der Felder fällt mit $\sim 1/r$ ab, das ist wichtig für den Energiesatz.
Es ist $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.
Die ganze Theorie gilt nur, wenn der Abstand $\gg$ Ausdehnung der Antenne und die Wellenlänge $\gg$ Ausdehnung der Antenne.

15 Bezugssystem= Koordinatensystem, in/auf dem ein Beobachter sitzt/steht/liegt.
Inertialsystem= Bezugssystem, das sich kräftefrei bewegt; die physikalischen Gesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form (sind kovariant).
Galileitransformation: Übergang zwischen Inertialsystemen in der Newtonschen Mechanik;
Lorentztransformation: ... in der Relativitätstheorie; diese berücksichtigt, daß die Lichtgeschw. in allen Bezugssystemen gleich sein soll.

16 Zeitdilatation: bewegte Uhren gehen langsamer;
Längenkontraktion: bewegte Stäbe sind kürzer.

17 Siehe Blatt 12, Aufg. 1 .

18 Energieerhaltung: $2\,(m_0c^2) = 2\,(pc)$, Impulserhaltung: $p_1 = -p_2 = -p$, also $pc = 511\,\mathrm{keV}$.
Soll ein einzelnes Photon zerfallen, so muß sein Impuls p in den Schwerpunktimpuls des e^+-e^--Paares übergehen. Im Schwerpunktsystem hat das Photon also keinen Impuls und damit auch keine Energie, und die endliche Ruheenergie $2(m_0c^2)$ kann nicht aufgebracht werden.

19 4er Vektoren genügen einer Transformation, die der Lorentztransformation der Koordinaten ganz analog ist, wenn man von einem Inertialsystem in ein anderes wechselt (Beispiel: Blatt 13, Aufg. 1). Jedes Skalarprodukt aus zwei 4er Vektoren ist damit automatisch invariant unter Bezugssystemwechsel (Lorentztransf.).

20 In der QM wird ein Teilchen nicht durch Ort und Impuls beschrieben (und die Newtonsche Bewegungsgleichung), sondern durch die Wellenfunktion (Zustand) und die Schrödingergleichung. Das Betragsquadrat der Wellenfunktion, $|\Psi(x)|^2$ läßt sich als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren, das Teilchen bei einer Ortsmessung bei x anzutreffen.