Universität Karlsruhe

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik C   WS 05/06

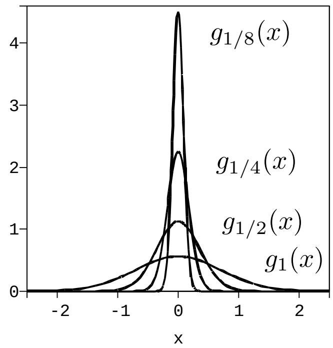
Prof. M. Vojta
Dr. M. Greiter

Blatt 2
Besprechung 15.11.05

---

1. Diracsche Deltafunktion: Darstellung (4 Punkte)

(a) Die Diracsche Delta-Funktion kann als Idealisierung einer Funktion mit schmalem, hohem Ausschlag aufgefaßt werden. Eine Schar von Funktionen mit für $a \to 0$ kleiner werdender Breite und wachsendem Ausschlag ist z.B.



$$g_a(x) := \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/a^2}\,, \quad a > 0.$$

Zeigen Sie:

$$\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, g_a(x) = 1\,; \quad \lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, g_a(x)\, f(x) = f(0)\,,$$

für beliebige Funktionen f, die in eine Taylorreihe um den Ursprung entwickelt werden können. [Wir schreiben daher auch symbolisch $\lim\limits_{a\to 0} g_a(x) = \delta(x)$.]

(b) Zeigen Sie unter Verwendung des Ergebisses von Teilaufgabe (a):

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx-\epsilon k^2} = 2\pi\delta(x)$$

[Wir schreiben daher auch symbolisch $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = 2\pi\delta(x).$]

(je 2 Punkte)

2. Greensche Funktionen I (4 Punkte)

L sei ein linearer gewöhnlicher Differentialoperator. Eine Distribution $G(t,t')$, die von einem Parameter t' abhängt, heißt Greensche Funktion zu L, wenn im Distributionssinne $L\,G(t,t') = \delta(t-t')$ gilt. Mit Hilfe einer Greenschen Funktion kann man eine spezielle Lösung $f_0(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung $L\,f(t) = h(t)$ für eine vorgegebene Funktion $h(t)$ so schreiben:

$$f_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\, G(t,t')\, h(t')\,.$$

(a) Wir betrachten als Beispiel den linearen Differentialoperator $L = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + a(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + b(t)$. $g_{t'}(t)$ sei Lösung der homogenen Differentialgleichung $L\,g_{t'}(t) = 0$ zu den Anfangswerten $g_{t'}(t') = 0$, $\dot{g}_{t'}(t') = 1$. Zeigen Sie, daß $G(t,t') := \theta(t-t')\,g_{t'}(t)$ eine Greensche Funktion zu L ist.

(b) Bestimmen Sie unter Verwendung der vorherigen Teilaufgabe eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\, f(t) = h(t)\,.$$

(je 2 Punkte)

3. Linienladung (5 Punkte)

Die Gesamtladung Q sei homogen über eine gerade Linie der Länge $2L$ verteilt.

(a) Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ an und berechnen Sie das elektrostatische Potential dieser Ladungsverteilung.
(2 Punkte)

(b) Betrachten Sie den Grenzübergang $L \to 0$ bei konstanter Gesamtladung.
(1 Punkt)

(c) Betrachten Sie den Grenzübergang $L \to \infty$ bei konstanter Ladung pro Längeneinheit. Verschieben Sie hierzu den Potentialnullpunkt so, daß das das Potential für große L endlich bleibt.
(2 Punkte)