Universität Karlsruhe

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik C WS 05/06

Prof. M. Vojta
Dr. M. Greiter

Blatt 3
Besprechung 22.11.05

---

1. Diracsche Deltafunktion: Eigenschaften (4 Punkte)

Die Deltafunktion ist definiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \delta(x) \, f(x) = f(0) \, .$$

Weiterhin gelten die Regeln für partielle Integration und Variablensubstitution.

(a) Zeigen Sie: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \delta'(x) \, f(x) = -f'(0)$
(1 Punkt)

(b) Zeigen Sie: Für $a \neq 0$ gilt $\delta\left(a\,(x-b)\right) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x-b)$
(1 Punkt)

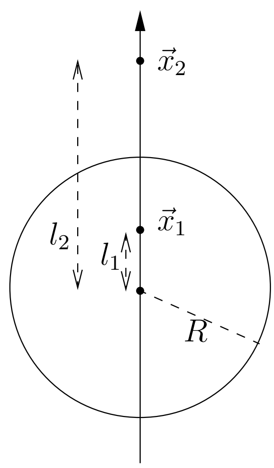
(c) Zeigen Sie: $\delta(g(x)) = \sum_k \frac{1}{|g'(x_k)|}\,\delta(x - x_k)$. Hierbei sind x_k die Nullstellen der Funktion g, und es wird vorausgesetzt, daß $g'(x_k) \neq 0$.
(2 Punkte)

2. Potential zweier Punktladungen (3 Punkte)

Wir betrachten ein System aus zwei Punktladungen q_1 und $-q_2$ ($q_2 > q_1 > 0$) an den Orten $\vec{x}_1 = \vec{0}$, $\vec{x}_2 = (0, 0, a)$.
Zeigen Sie: Das Potential verschwindet auf einer Kugelfläche vom Radius R, deren Zentrum auf der z-Achse liegt und von den Punktladungen die Abstände l_1, l_2 hat. l_1, l_2 und R hängen durch

$$\frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2 , \qquad R^2 = l_1 l_2$$

zusammen.



3. Greensche Funktionen II (2 Punkte)

Analog zu Aufgabe 2 auf Blatt 2 kann man auch für *partielle* lineare Differentialgleichungen Greensche Funktionen definieren. Als Beispiel betrachten wir die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) T(t,x) = 0\,.$$

Hierbei ist $T(t,x)$ die Temperatur zur Zeit t am Ort x und λ die Temperaturleitfähigkeit. Eine zugehörige Greensche Funktion muß die Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G(t-t', x-x') = \delta(t-t')\,\delta(x-x')$$

erfüllen. Zeigen Sie, daß

$$G(t,x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda t}}\,\theta(t)\,\exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda t}\right)$$

diese Gleichung löst. Beschreiben Sie, wie sich die Temperatur durch Wärmeleitung ändert, wenn zur Zeit $t=0$ am Ort $x=0$ punktuell eine Erhitzung vorliegt.