Universität Karlsruhe
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik C WS 05/06

Prof. M. Vojta
Dr. M. Greiter

Blatt 6
Besprechung 13.12.05

---

1. Unendlich lange Spule (6 Punkte)

Wir betrachten eine unendlich lange Spule mit dem Radius R. Die Windungen seien so eng, daß man eine kontinuierliche Stromdichte auf der durch die Spule definierten Zylinderfläche annehmen kann:

$$\vec{j}(\rho, \phi, z) = \delta(\rho - R)\, n\, I\, \vec{e}_\phi\,.$$

Hierbei ist n die Anzahl der Windungen pro Längeneinheit und I der Strom, der durch die Spule fließt. Die Steigung der Windungen wird vernachlässigt. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3x'\, \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

das Magnetfeld im Innen- und Außenraum der Spule.
Hinweise: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten. Für die z-Integration empfiehlt es sich, die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}$ anzuschauen. Für die Winkelintegration können Sie folgendes Integral verwenden:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi\, \frac{1 - b\cos\phi}{1 + b^2 - 2b\cos\phi} = \pi\, \frac{1 - b + |1 - b|}{|1 - b|}\,.$$

2. Translationsverhalten des Quadrupoltensors (3 Punkte)

Gegeben seien die kartesischen Quadrupolmomente D_{ij}, das Dipolmoment $\vec{p}$ und die Gesamtladung q einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$. Drücken Sie die Quadrupolmomente $\widetilde{D}_{ij}$ der um den Vektor $\vec{a}$ verschobenen Ladungsverteilung $\widetilde{\rho}(\vec{x}) := \rho(\vec{x} - \vec{a})$ durch D_{ij}, $\vec{p}$ und q aus. Bestimmen Sie als Beispiel den Quadrupoltensor einer Punktladung q am Ort $\vec{a}$.

3. Integrabilität von Vektorfeldern (3 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3 , \qquad \vec{v}(\vec{x}) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(a) Berechnen Sie rot $\vec{v}(\vec{x})$.
(0.5 Punkte)

(b) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_{S^1_R} d\vec{x} \cdot \vec{v}(\vec{x})$, wobei S^1_R den Kreis in der xy-Ebene mit Radius R um den Ursprung bezeichnet. Der Umlaufsinn ist mathematisch positiv (gegen den Uhrzeigersinn).
(1 Punkt)

(c) Besitzt $\vec{v}(\vec{x})$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ eine Stammfunktion (d.h. eine Funktion $F(\vec{x})$ mit $\vec{v}(\vec{x}) = \nabla F(\vec{x})$)? Falls nein: warum nicht? Falls ja: wie lautet die Stammfunktion?
(0.5 Punkte)

(d) $\vec{w}$ sei die Einschränkung von $\vec{v}$ auf den Bereich $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$. Besitzt $\vec{w}(\vec{x})$ in diesem Bereich eine Stammfunktion? Falls nein: warum nicht? Falls ja: wie lautet die Stammfunktion?
(1 Punkt)

[Bemerkung: Das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ ist das Vektorpotential einer unendlich langen, unendlich dünnen Spule. Die hier erarbeiteten Eigenschaften dieses Vektorfeldes spielen beim sog. *Aharonov-Bohm-Effekt* eine wesentliche Rolle; siehe z.B. Feynman, Vorlesungen über Physik, Band 2.]