Universität Karlsruhe

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik C   WS 05/06

Prof. M. Vojta
Dr. M. Greiter

Blatt 11
Besprechung 31.01.06

---

1. Ideale Leiter und Supraleiter (5 Punkte)

(a) In einem idealen Leiter können sich die Leitungselektronen frei bewegen. Angenommen, in einem solchen idealen Leiter bestehe ein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{x})$. Stellen Sie mit Hilfe der Bewegungsgleichung für die Leitungselektronen einen Zusammenhang zwischen der Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$ und dem elektrischen Feld her. Zeigen Sie, daß die Größe

$$\nabla \times \vec{j} + \frac{n_s e^2}{m} \vec{B}$$

zeitunabhängig ist. Hierbei ist n_s die Elektronendichte, m die Elektronmasse.
(1 Punkt)

(b) Ein Supraleiter ist ein idealer Leiter, in dem zusätzlich die Londonsche Gleichung

$$\nabla \times \vec{j} + \frac{n_s e^2}{m} \vec{B} = 0$$

gilt. Zeigen Sie, daß dann auch die Gleichungen

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{\Lambda^2} \vec{B}\,, \qquad \Delta \vec{j} = \frac{1}{\Lambda^2} \vec{j}$$

gelten und bestimmen Sie Λ. [Die typische Größenordnung für Λ ist 10^{-5} cm.]
(2 Punkte)

(c) Ein Supraleiter verdrängt Magnetfelder aus seinem Inneren (Meissner-Effekt). Dies wollen wir anhand eines einfachen Beispiels nachvollziehen. Der Supraleiter fülle den Halbraum $z \leq 0$ aus, darüber befinde sich Vakuum. Im Bereich $z > 0$ sei ein konstantes Magnetfeld $\vec{B}$ vorhanden. Berechnen Sie das Magnetfeld im Supraleiter.
(2 Punkte)

2. Längenkontraktion (3 Punkte)

Im Inertialsystem K befinde sich ein ruhender Stab der Länge L. Seine Endpunkte beschreiben die Weltlinien $(ct, 0, 0, 0)$ und $(ct, L, 0, 0)$. Welche Länge mißt man im Inertialsystem K', welches sich relativ zu K mit der Geschwindigkeit $(v, 0, 0)$ bewegt?

3. Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes (5 Punkte)

Wie in der Mechanik, kann man auch in der Feldtheorie Bewegungsgleichungen aus einem Wirkungsprinzip ableiten. Angenommen, wir haben N Felder $f_i(\vec{x}, t)$ $(i = 1..N)$. Dann ist die Lagrangefunktion L als räumliches Integral über die sogenannte *Lagrangedichte* $\mathscr{L}$ gegeben,

$$L[f_i] = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \mathscr{L}\left(f_1(\vec{x}, t), \ldots, f_N(\vec{x}, t), \nabla f_1(\vec{x}, t), \ldots, \nabla f_N(\vec{x}, t), \dot{f}_1(\vec{x}, t), \ldots, \dot{f}_N(\vec{x}, t)\right) .$$

Die Lagrangedichte $\mathscr{L}$ ist eine Funktion von $5N$ Variablen. Die Euler-Lagrangegleichungen lauten

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial f_i(\vec{x}, t)} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \nabla f_i(\vec{x}, t)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{f}_i(\vec{x}, t)} = 0 .$$

(a) Als einfaches Beispiel betrachten wir ein Feld $f(\vec{x}, t)$, das der Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2\right) f = 0$$

gehorcht. Zeigen Sie, daß man diese Wellengleichung aus der Lagrangedichte

$$\mathscr{L}(f(\vec{x}, t), \nabla f(\vec{x}, t), \dot{f}(\vec{x}, t)) = \frac{1}{2c^2}\, \dot{f}(\vec{x}, t)^2 - \tfrac{1}{2}\, \nabla f(\vec{x}, t) \cdot \nabla f(\vec{x}, t)$$

erhält.
(2 Punkte)

(b) Die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes ohne Quellen lautet

$$\mathscr{L}(\Phi, A_i, \nabla\Phi, \nabla A_i, \dot{\Phi}, \dot{A}_i) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{x}, t)^2 - \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t)^2\right) ,$$

wobei $\vec{B}$ und $\vec{E}$ wie üblich durch die Potentiale Φ und $\vec{A}$ gegeben sind. Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrangegleichungen auf die Maxwellgleichungen führen.
(3 Punkte)