ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK C — BLATT 2

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. S. Uccirati (Theoretische Teilchenphysik)

Abgabe: Montag, 2.11.2009, 9:30 Uhr
Besprechung: Dienstag, 3.11.2009

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Bierweiler Anastasia	☐ Gruppe 7 Husnik Martin	☐ Gruppe 13 Rogal Mikhail
☐ Gruppe 2 Davidkov Momchil	☐ Gruppe 8 Kleine Jonas	☐ Gruppe 14 Rzehak Heidi
☐ Gruppe 3 Gansel Justyna	☐ Gruppe 9 Marquard Peter	☐ Gruppe 15 Schnitter Karsten
☐ Gruppe 4 Gerhard Lukas	☐ Gruppe 10 Prausa Mario	☐ Gruppe 16 Wayand Stefan
☐ Gruppe 5 v.Hodenberg Janine	☐ Gruppe 11 Redlof Martin	
☐ Gruppe 6 Hofer Lars	☐ Gruppe 12 Rittinger Jörg	

Aufgabe 1: Rechenübungen mit dem Nabla-Operator — 4 Punkte

i) Berechnen Sie folgende Ausdrücke ($r = |\vec{r}|$): *1P*

$$\vec{\nabla} r, \quad \vec{\nabla}\vec{r}, \quad \vec{\nabla}\frac{1}{r}, \quad \vec{\nabla}\frac{1}{r^3}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{r}, \quad \vec{\nabla} f(r), \quad \vec{\nabla}\times\left(f(r)\frac{\vec{r}}{r}\right).$$

ii) Weiterhin berechnen Sie *1P*

$$\vec{\nabla}\left(\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}}\right), \qquad \vec{\nabla}\left(\vec{q}\,\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}}\right), \qquad \vec{\nabla}\times\left(\vec{q}\,\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}}\right),$$

wobei $\vec{q}$ und $\vec{k}$ feste Vektoren sind.

iii) Es seien $\phi(\vec{r})$, $\vec{v}(\vec{r})$ und $\vec{w}(\vec{r})$ stetig differenzierbare Skalar- bzw. Vektorfelder. Zeigen Sie, dass *2P*

(a) $$\vec{\nabla}(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{w}(\vec{\nabla}\times\vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla}\times\vec{w}),$$

(b) $$\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}(\vec{\nabla}\vec{w}) - \vec{w}(\vec{\nabla}\vec{v}) + (\vec{w}\vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{w},$$

(c) $$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = 0,$$

(d) $$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{v}) - \triangle\vec{v}.$$

Benutzen Sie die folgende Methode (Nabla-Kalkül):
Der Nabla-Operator ist ein linearer Differentialoperator, der formal wie ein Vektor behandelt werden kann (d.h. es gelten die üblichen Regeln der Vektorrechnung),

(bitte wenden)

wenn man beim Umformen obiger Ausdrücke durch eine spezielle Notation die Vektor- bzw. Skalarfelder kennzeichnet, auf die der Nabla-Operator wirkt. Dies kann z.B. auf folgende Weise geschehen:

$$\vec{\nabla} \times (\phi\vec{v}) = \vec{\nabla}\times \overset{\Downarrow}{\phi}\, \vec{v} + \vec{\nabla} \times \phi\, \overset{\Downarrow}{\vec{v}} = \vec{\nabla} \times \vec{v}\, \overset{\Downarrow}{\phi} + \phi\vec{\nabla}\times \overset{\Downarrow}{\vec{v}} = -\vec{v} \times (\vec{\nabla}\phi) + \phi\vec{\nabla} \times \vec{v}.$$

Der Pfeil "$\Downarrow$" über einer Größe bedeutet, daß der Nabla-Operator nur auf diese Größe wirkt. Am Ende einer solchen Umformung verwendet man wieder die üblichen Ausdrücke der Vektorrechnung.

Aufgabe 2: Nicht-konservative und konservative Felder	3 Punkte

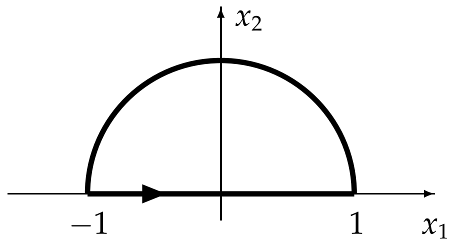
Gegeben sei ein im Allgemeinen nicht-konservatives Feld:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \alpha x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

i) Berechnen Sie das Linienintegral *2P*

$$\oint_C d\vec{x}\, \vec{E}(\vec{x})$$

längs des Weges C, der in folgender Abbildung definiert ist.



ii) Berechnen Sie rot$\vec{E}$. Für welches α ist $\vec{E}$ ein konservatives Feld? Wie lautet in diesem Fall das elektrostatische Potential $\phi(\vec{x})$? *1P*

Aufgabe 3: Rotation eines Vektorfelds	2 Punkte

Ein Vektorfeld $\vec{A}$ sei in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) gegeben und habe als einzige nicht-verschwindende Komponente A_ϕ, wobei

$$A_\phi = \frac{4\pi}{3} M \begin{cases} r \sin\theta, & r \leq a, \\ \frac{a^3}{r^2} \sin\theta, & r > a. \end{cases}$$

Berechnen Sie rot$\vec{A}$.