Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. S. Uccirati (Theoretische Teilchenphysik)

Abgabe: Montag, 11.1.2010, 9:30 Uhr
Besprechung: Dienstag, 12.1.2010

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Bierweiler Anastasia	☐ Gruppe 7 Husnik Martin	☐ Gruppe 13 Rogal Mikhail
☐ Gruppe 2 Davidkov Momchil	☐ Gruppe 8 Kleine Jonas	☐ Gruppe 14 Rzehak Heidi
☐ Gruppe 3 Gansel Justyna	☐ Gruppe 9 Marquard Peter	☐ Gruppe 15 Schnitter Karsten
☐ Gruppe 4 Gerhard Lukas	☐ Gruppe 10 Prausa Mario	☐ Gruppe 16 Wayand Stefan
☐ Gruppe 5 v.Hodenberg Janine	☐ Gruppe 11 Redlof Martin	
☐ Gruppe 6 Hofer Lars	☐ Gruppe 12 Rittinger Jörg	

Aufgabe 1: Fourier-Transformation — 5 Punkte

Die Fouriertransformierte $\tilde{f}(\vec{k}\,)$ einer Funktion $f(\vec{x}\,)$ ist definiert:

$$\tilde{f}(\vec{k}\,) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_V d^3x\, f(\vec{x}\,)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

Die inverse Fourier-Transformation lautet dann

$$f(\vec{x}\,) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_V d^3k\, \tilde{f}(\vec{k}\,)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

Die Funktion $f(\vec{x}\,)$ erfülle im Folgenden die mathematischen Voraussetzungen, so dass die Fourier-Transformierte existiert. Nehmen Sie insbesondere an, dass $f(\vec{x}\,)$ im Unendlichen verschwinde.

i) Zeigen Sie, dass die Delta-Distribution in der Form *2P*

$$\delta(\vec{x}\,) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

dargestellt werden kann.

(bitte wenden)

Hinweis: Fügen Sie dazu im Exponenten einen Dämpfungsterm $-\epsilon\,(|k_x| + |k_y| + |k_z|)$ mit $\epsilon > 0$ hinzu, so dass der Integrand im Unendlichen verschwindet. Betrachten Sie erst nach der Berechnung des Integrals den Grenzwert für $\epsilon \to 0$.

ii) Zeigen Sie die Parsevalsche Identität: *1P*

$$\int_V d^3x\, f^*(\vec{x}\,)\, g(\vec{x}\,) = \int_V d^3k\, \tilde{f}^*(\vec{k}\,)\, \tilde{g}(\vec{k}\,)$$

iii) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $\partial_i\, f(\vec{x}\,)$. *1P*

iv) Die Faltung zweier Funktionen $f(\vec{x}\,)$ und $g(\vec{x}\,)$ ist definiert durch *1P*

$$h(\vec{x}\,) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_V d^3x'\, f(\vec{x} - \vec{x}\,')\, g(\vec{x}\,')$$

Zeigen Sie das Faltungstheorem $\tilde{h}(\vec{k}\,) = \tilde{f}(\vec{k}\,)\tilde{g}(\vec{k}\,)$.

Aufgabe 2: Fourier-Transformation der Lösung der Wellengleichung 3 Punkte

Zeigen Sie, daß die Fouriertransformierte der in der Vorlesung hergeleiteten Lösung der relativistischen Wellengleichung

(a) $$\tilde{D}(t,\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2\,i\,\omega(\vec{k})} \left(e^{i\,\omega(\vec{k})t} - e^{-i\,\omega(\vec{k})t}\right)$$

mit $\omega(\vec{k}) = c|\vec{k}|$ gegeben ist durch:

(b) $$D(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|c^2} \left[\delta(t - |\vec{x}|/c) - \delta(t + |\vec{x}|/c)\right].$$

Aufgabe 3: Überlagerung von Wellen 4 Punkte

Betrachten Sie die Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen mit gleichem Wellenvektor $\vec{k}$.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) + \vec{E}_2 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t - \phi) \qquad \text{mit} \qquad \vec{E}\cdot\vec{k} = 0.$$

Sei die Ausbreitung der Wellen in z-Richtung, d.h. $\vec{k} = k\vec{e}_z$ und $E_{1z} = E_{2z} = 0$.
Welche Bedingungen sollen E_{1x}, E_{2x}, E_{1y}, E_{2y} und ϕ erfüllen, so dass

i) $\vec{E}$ is linear polarisiert, *2P*

ii) $\vec{E}$ is zirkular polarisiert. *2P*