ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK C — BLATT 12

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik) — Abgabe: Montag, 1.2.2010, 9:30 Uhr

Dr. S. Uccirati (Theoretische Teilchenphysik) — Besprechung: Dienstag, 2.2.2010

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Bierweiler Anastasia	☐ Gruppe 7 Husnik Martin	☐ Gruppe 13 Rogal Mikhail
☐ Gruppe 2 Davidkov Momchil	☐ Gruppe 8 Kleine Jonas	☐ Gruppe 14 Rzehak Heidi
☐ Gruppe 3 Gansel Justyna	☐ Gruppe 9 Marquard Peter	☐ Gruppe 15 Schnitter Karsten
☐ Gruppe 4 Gerhard Lukas	☐ Gruppe 10 Prausa Mario	☐ Gruppe 16 Wayand Stefan
☐ Gruppe 5 v.Hodenberg Janine	☐ Gruppe 11 Redlof Martin	
☐ Gruppe 6 Hofer Lars	☐ Gruppe 12 Rittinger Jörg	

Aufgabe 1: Transversale elektrische Welle in einem Hohlleiter — 3 Punkte

Betrachten Sie die Ausbreitung in z-Richtung einer transversalen elektrischen (TE) Welle in einem idealen quadratischen Hohlleiter mit Seitenlänge a.
Berechenen Sie explizit die longitudinale und transversale Komponenten der $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder mit dem Ansatz:

$$B_z = B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Skizzieren Sie das Ergebnis und zeigen Sie, dass auf der Hohlleiteroberfläche $\vec{E}$ senkrecht und $\vec{B}$ parallel zur Oberfläche sind.

Aufgabe 2: Wellenausbreitung in einer Dimension — 5 Punkte

Die Funktion $u(x,t)$ sei Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right) u(x,t) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$u(x,0) \equiv a(x) = N\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\delta^2}}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\bigg|_{t=0} \equiv b(x) = -N\frac{x}{\delta^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\delta^2}}.$$

(bitte wenden)

i) Bestimmen Sie die Konstante N aus der Normierungsbedingung *1P*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, |u(x,0)|^2 = 1$$

ii) Berechnen Sie die Fouriertransformierten $\tilde{a}(k)$ und $\tilde{b}(k)$ von $a(x)$ und $b(x)$. *2P*

Hinweis: Die Fouriertransformierte $\tilde{b}(k)$ ergibt sich fast unmittelbar aus dem Ergebnis von $\tilde{a}(k)$.

iii) Berechnen Sie die Lösung für $u(x,t)$ explizit in folgender Darstellung *2P*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi}} \left[\alpha(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kx} + \beta(k)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kx}\right], \qquad \omega = c\,k,$$

und skizzieren Sie die Funktion $u(x,t)$ für $t = 0$ und $t = \delta/c$.

Aufgabe 3: Formstabile und zerlaufende Wellenpakete — 4 Punkte

Gegeben sei ein Wellenpaket, das sich in positiver x-Richtung ausbreite:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi}} \tilde{A}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega(k)t}.$$

$\tilde{A}(k)$ sei in der Umgebung von k_0 konzentriert.

i) Nehmen Sie an, daß $\omega(k)$ im Spektralbereich des Wellenpakets linear approximiert werden kann, d.h. *1P*

$$\omega(k) \approx \omega_0 + (k - k_0) \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_0}, \qquad \omega_0 = \omega(k_0).$$

Zeigen Sie, daß sich das Wellenpaket mit der Gruppengeschwindigkeit $v_g = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_0}$ unverändert fortpflanzt (bis auf eine ortsunabhängige Phasenverschiebung).

ii) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Wellenpakets mit der folgenden nichtlinearen Dispersionsrelation *3P*

$$\omega(k) = \frac{ak^2}{2},$$

für den Fall, daß das Wellenpaket zum Zeitpunkt $t = 0$ die folgende Form habe:

$$u(x,0) = u_0 \cos(k_0 x)\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\delta^2}}.$$

Hinweis: Zerlegen Sie $\cos(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz})$. Sie bekommen dann eine Summe aus zwei Integralen, von denen das zweite durch die Ersetzung $k_0 \to -k_0$ erhalten werden kann.