Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2010/2011
Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. K. Busch, Dr. R. Frank 22.10.2010
http://photonics.tfp.uni-karlsruhe.de/teaching kurt@tfp.uni-karlsruhe.de rfrank@tfp.uni-karlsruhe.de

Klassische Theoretische Physik III - Elektrodynamik
WS10/11

Übungsblatt 2 - 22 Punkte
Abgabe bis Freitag, 29.10.10

Aufgabe 1 *Delta- und Thetafunktion* **(10 Punkte)**

Sei $\epsilon > 0$ eine reelle Zahl und $x \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die drei Funktionenfolgen $\delta_\epsilon^G(x)$, $\delta_\epsilon^L(x)$ und $\delta_\epsilon^R(x)$, wobei die oberen Indizes G, L und R für Gauß-, Lorentz- und Rechteck-Funktionenfolge stehen. Diese Folgen sind gegeben als:

$$\delta_\epsilon^G(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}} \qquad \delta_\epsilon^L(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \qquad \delta_\epsilon^R(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \forall \quad |x| < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie, dass für alle drei Folgen unabhängig von ϵ gilt: (1 P)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon^i(x) = 1 \qquad \forall\ \epsilon \qquad \text{und} \quad i = \{G, L, R\}.$$

b) Betrachten Sie die drei Funktionenfolgen $\theta_\epsilon^G(x)$, $\theta_\epsilon^L(x)$ und $\theta_\epsilon^R(x)$, definiert gemäß

$$\theta_\epsilon^i(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x' \delta_\epsilon^i(x') \qquad \text{mit} \qquad i = \{G, L, R\}$$

und zeigen Sie (3 P)

$$\lim_{\epsilon\to 0} \theta_\epsilon^i(x) = \begin{cases} 0 & \forall\ x < 0 \\ 1 & \forall\ x > 0 \end{cases} \qquad \text{für} \qquad i = \{G, L, R\}.$$

c) Zeigen Sie, dass

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon^i(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \theta_\epsilon^i(x) \qquad \text{mit} \qquad i = \{G, L, R\}$$

eine Diracsche Deltafunktion ist, d.h. zeigen Sie, dass für jede Darstellung $i = \{G, L, R\}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \delta(x - x') f(x') = f(x),$$

für jede genügend "glatte" Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (3 P)

d) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Rechteck-Funktionenfolge $\delta_\epsilon^R(x)$ für alle ϵ, d.h bestimmen Sie: (1 P)

$$\delta_\epsilon^R(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; \delta_\epsilon^R(x) \, e^{-ikx} \; .$$

e) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon^R(k)$ und interpretieren Sie ihn in Zusammenhang mit $\lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon^R(x)$. Betrachten Sie weiterhin ebenso den Grenzübergang $\epsilon \to \infty$ sowohl für $\delta_\epsilon^R(k)$ als auch $\delta_\epsilon^R(x)$ und interpretieren Sie dieses Ergebnis gleichfalls. (2 P)

Aufgabe 2 *Vektorfelder* **(5 Punkte)**

Zeigen Sie die folgende Relation:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})) = \vec{A}(\vec{r})(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r})) + (\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla})\vec{A}(\vec{r}) - \vec{B}(\vec{r})(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})) - (\vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla})\vec{B}(\vec{r}).$$

Aufgabe 3 *Satz von Gauß, Satz von Stokes* **(7 Punkte)**

Die Kraft, die eine Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ in einem äußeren elektrischen Feld $\vec{E}$ erfährt ist gegeben durch:

$$\vec{F} = \int_V \mathrm{d}^3\vec{r} \, \rho(\vec{r}) \, \vec{E}(\vec{r}).$$

Zeigen Sie, dass diese Kraft auch als Integral über die Oberfläche A, die das Volumen V umgibt, geschrieben werden kann:

$$\vec{F} = \oint_A \mathrm{d}\vec{a} \cdot \overleftrightarrow{T} = \epsilon_0 \oint \mathrm{d}a[\vec{E}(\hat{n} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{2}\hat{n}\vec{E}^2].$$

$\hat{n}$ ist der senkrecht zur Oberfläche A stehende Normalenvektor, der die Länge 1 besitzt. $\overleftrightarrow{T}$ ist die elektrostatische Spannungsdyade (Tensor):

$$\overleftrightarrow{T} = \epsilon_0(\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2}\overleftrightarrow{\mathbb{1}}\vec{E}^2)$$

oder auch

$$T_{ij} = \epsilon_0(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\vec{E}^2)$$

$\vec{E}\vec{E}$ is als dyadisches Produkt definiert, d.h. $\vec{E}\vec{E}$ ist ein Tensor mir Komponenten $\left(\vec{E}\vec{E}\right)_{ij} = E_i E_j$. Dagegen ist $\vec{E}^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$ ein Skalar, nämlich der Betrag des Vektors $\vec{E}$. Benutzen Sie $\rho = \epsilon_0(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$ und $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

VIEL ERFOLG!!!