Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2010/2011
Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. K. Busch, Dr. R. Frank 29.10.2010
http://photonics.tfp.uni-karlsruhe.de/teaching kurt@tfp.uni-karlsruhe.de rfrank@tfp.uni-karlsruhe.de

Klassische Theoretische Physik III - Elektrodynamik
WS10/11

Übungsblatt 3 - 36 Punkte
Abgabe bis Freitag, 05.11.10

Aufgabe 1 *Kugel- und Zylinderkoordinaten* **(12 Punkte)**

Oftmals vereinfachen sich Probleme, wenn man anstatt des kartesischen Koordinatensystems (x, y, z) ein der Symmetrie des Problems angepasstes Koordinatensystem wählt (insbesondere Zylinder- und Kugelkoordinaten). Dies gilt auch für die Darstellung von Gradient, Divergenz und Rotation. In dieser Aufgabe wird der Gradient in Kugelkoordinaten $(r; \theta; \phi)$ transformiert, und die Rotation in Zylinderkoordinaten $(\rho; \phi; z)$.

Der Zusammenhang zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten ist:

$$x = r \cdot \sin\theta\cos\phi, \quad y = r \cdot \sin\theta\sin\phi, \quad z = r \cdot \cos\theta,$$

und für die Einheitsvektoren gilt:

$$\hat{e}_r = (\sin\theta \cdot \cos\phi)\hat{e}_x + (\sin\theta \cdot \sin\phi)\hat{e}_y + \cos\theta\,\hat{e}_z,$$

$$\hat{e}_\theta = (\cos\theta \cdot \cos\phi)\hat{e}_x + (\cos\theta \cdot \sin\phi)\hat{e}_y - \sin\theta\,\hat{e}_z,$$

$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\,\hat{e}_x + \cos\phi\,\hat{e}_y.$$

Der Zusammenhang zwischen kartesischen und Zylinderkoordinaten ist:

$$x = \rho\cos\phi, \qquad y = \rho\sin\phi, \qquad z = z,$$

und für die Einheitsvektoren gilt:

$$\hat{e}_\rho = \cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\phi\,\hat{e}_y, \quad \hat{e}_\phi = -\sin\phi\,\hat{e}_x + \cos\phi\,\hat{e}_y, \quad \hat{e}_z = \hat{e}_z.$$

a) Berechnen Sie aus den Angaben oben die Kugelkoordinaten $r(x, y, z)$ $\theta(x, y, z)$ und $\phi(x, y, z)$ als Funktion der kartesischen Koordinaten. (4P)

b) Berechnen Sie $\vec{\nabla} f(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \phi(x, y, z))$ in Kugel-Koordinaten-Komponenten unter Verwendung der ersten oben angegebenen Gleichung und Benutzung der Kettenregel. Berechnen Sie außerdem $\vec{\nabla} \times \vec{f}(\rho(x, y), \theta(x, y), z)$ in Zylinder-Koordinaten-Komponenten. (4P)

c) Ersetzen Sie schließlich mit obigem Hinweis die kartesichen Einheitsvektoren für den Zylinder $\hat{e}_x, \hat{e}_y$ durch $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi$, und für die Kugel $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ durch $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$. (4P)

Aufgabe 2 *Anwendungen von krummlinigen Koordinaten* **(12 Punkte)**

Wenden Sie die neu gewonnenen Darstellungen an. Die Vektorableitungen in Zylinderkoordinaten sind:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\rho}{\partial z}\right)\hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho}\right)\hat{e}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho v_\phi) - \frac{\partial v_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{e}_z$$

Dabei sei $\vec{v} = v_\rho \hat{e}_\rho + v_\phi \hat{e}_\phi + v_z \hat{e}_z$.

Die Vektorableitungen in Kugelkoordinaten sind:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{e}_\phi$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right)\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\hat{e}_\phi$$

Dabei sei $\vec{v} = v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta + v_\phi \hat{e}_\phi$.

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Angaben:

a) den Gradienten der Funktion $f(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho}$. (3P)

b) die Divergenz von $\vec{v}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho^2}\hat{e}_\rho$ und $\vec{v}(\rho, \phi, z) = \hat{e}_\phi$. (3P)

c) den Gradienten der Funktion $f(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r}$. (3P)

d) die Divergenz der Rotation von $\vec{v}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2}\hat{e}_r$ und $\vec{v}(r, \theta, \phi) = \hat{e}_\phi$. (3P)

Aufgabe 3 *Potential auf Kugeloberfläche* **(12 Punkte)**

Zeigen Sie folgenden 'Mittelwertsatz': Im ladungsfreien Raum ist der Wert des elektrostatischen Potentials an jedem Punkt $\vec{r}$ gleich dem Mittelwert des Potentials auf der Oberfläche S einer beliebigen Kugel um diesen Punkt, also:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint_S da'\, \Phi(\vec{r}')$$

$R = |\vec{r}|$ ist der Betrag des Vektors.

VIEL ERFOLG!!!