Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2010/2011
Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. K. Busch, Dr. R. Frank 05.11.2010
http://photonics.tfp.uni-karlsruhe.de/teaching kurt@tfp.uni-karlsruhe.de rfrank@tfp.uni-karlsruhe.de

Klassische Theoretische Physik III - Elektrodynamik
WS10/11

Übungsblatt 4 - 32 Punkte (+10 Zusatzpunkte)
Abgabe bis Freitag, 12.11.10

Aufgabe 1 *Homogen geladener Zylinder* **(6 Punkte)**

Betrachten Sie einen massiven, homogen geladenen, unendlich langen Zylinder mit kreisförmigem Querschnitt und der (konstanten) Ladungsdichte ρ_0, der parallel zur z-Achse ausgerichtet ist.

a) Überlegen Sie sich zunächst die, aufgrund der Symmetrie des Systems zu erwartende, Feldverteilung. Bestimmen Sie (mit Hilfe des Gauß'schen Satzes) das elektrische Feld $\vec{E}$ pro Einheitslänge innerhalb und außerhalb des Zylinders.
(3 Punkte)

b) Bestimmen Sie das zugehörige Potential $\phi(\rho)$. Skizzieren Sie es als Funktion der Polarkoordinate ρ. Wie verhält es sich an der Grenze des Zylinders? Interpretieren Sie das Ergebnis mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen.
(3 Punkte)

Aufgabe 2 *Wasserstoffatom im Grundzustand* **(16 Punkte)**

Das neutrale Wasserstoffatom in seinem sogenannten Grundzustand verhält sich effektiv wie eine elektrische Ladungsverteilung, die aus einer zentralen Punktladung $+e$ des Kerns (also einem als punktförmig angenommenem Proton) besteht, welche von einer negativen Ladungswolke umgeben ist. Die (radialsymmetrische) Ladungsdichte dieser Wolke ist gegeben durch

$$\rho_-(r) = C\, e^{-2r/a_0}. \tag{1}$$

Dabei ist $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-8}$cm der Bohr'sche Atomradius und die Normierungskonstante C sorgt dafür, dass die Gesamtladung der Wolke den Wert $-e$ ergibt.

a) Berechnen Sie die Konstante C und die elektrische Ladung innerhalb einer Kugel vom Radius a_0. Wie groß ist die elektrische Feldstärke im Abstand a_0 vom Kern des Wasserstoffatoms?
(8 Punkte)

b) Wie groß sind die elektrischen Potentiale, die allein vom Proton (der Punktladung $+e$ im Ursprung) bzw. allein von der Elektronenwolke (der Ladungsdichte $\rho_-(r)$) herrühren? Was ergibt sich für das Gesamtpotential ϕ_{tot} ? Berechnen Sie nun $-\vec{\nabla}^2\phi_{tot}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.
(8 Punkte)

Aufgabe 3 *Dualität der Maxwell'schen Gleichungen* **(10 Punkte)**

Die sogenannte Dualitätstransformation des elektromagnetischen Feldes ist definiert durch

$$\tilde{\vec{E}} = \cos\zeta\,\vec{E} - (\sin\zeta/\sqrt{\epsilon_0\mu_0})\;\vec{B}$$
$$\tilde{\vec{B}} = (\sin\zeta\,\sqrt{\epsilon_0\mu_0})\;\vec{E} + \cos\zeta\,\vec{B}$$

wobei $\zeta \in [0, 2\pi]$ eine beliebige aber feste Zahl ist, und die Felder $\vec{E} \equiv \vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B} \equiv \vec{B}(\vec{r}, t)$ Lösungen der (gewöhnlichen) Maxwell'schen Gleichungen mit (elektrischer) Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ und (elektrischer) Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t)$ sind.

a) Zeigen Sie, dass die Felder $\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, t)$ und $\tilde{\vec{B}}(\vec{r}, t)$ den modifizierten Maxwell'schen Gleichungen

$$\nabla \cdot \tilde{\vec{E}} = \tilde{\rho}_e/\epsilon_0 \qquad \nabla \times \tilde{\vec{E}} = -\left(\tilde{\vec{j}}_m + \partial_t \tilde{\vec{B}}\right)$$
$$\nabla \cdot \tilde{\vec{B}} = \tilde{\rho}_m \qquad \nabla \times \tilde{\vec{B}} = \mu_0\left(\tilde{\vec{j}}_e + \epsilon_0\,\partial_t \tilde{\vec{E}}\right)$$

genügen. Bestimmen Sie die 'magnetische' und 'elektrische' Ladungsdichten, $\tilde{\rho}_m$ und $\tilde{\rho}_e$, sowie die zugehörigen Stromdichten $\tilde{\vec{j}}_m$ und $\tilde{\vec{j}}_e$.
(4 Punkte)

b) Untersuchen Sie, ob die 'magnetischen' und 'elektrischen' Ladungen erhalten sind, d.h. ob sie Kontinuitätsgleichungen genügen. Was ergibt sich für die Lorentz-Kraftdichte?
(4 Punkte)

c) Interpretieren Sie die Ergebnisse aus a) und b) hinsichtlich der Bedeutung 'elektrischer' und 'magnetischer' Ladungen sowie insbesondere im Hinblick auf die vielfach und durchweg sehr kontrovers diskutierte Frage nach der Existenz magnetischer Ladungen.
Hinweis: Berechnen Sie dazu das Verhältnis

$$\frac{\tilde{\rho}_m(\vec{r}, t)}{\tilde{\rho}_e(\vec{r}, t)}$$

der Ladungsdichten und beachten Sie, daß dieses Verhältnis an <u>unterschiedlichen</u> Orten $\vec{r}$ und/oder zu <u>unterschiedlichen</u> Zeiten t (eigentlich) <u>unterschiedliche</u> Werte liefern kann.
(2 Punkte)

Zusatzaufgabe *Existenz magnetischer Monopole nach Dirac* **(10 Punkte)**

Im Jahr 1931 formulierte P.A.M. Dirac ein überaus geistreiches Argument, welches zwanglos die Quantelung elektrischer Ladungen erklären würde, sofern im ganzen Universum wenigstens ein einziger magnetischer Monopol existierte. In dieser Aufgabe wollen wir Dirac's Argumentation (verkürzt) nachvollziehen.
Dazu betrachten wir eine unbewegliche elektrische Punktladung mit elektrischer Ladung q_e, die sich an der Stelle $\vec{r}_e$ befindet, sowie eine unbewegliche magnetische Punktladung mit Ladung q_m, die sich am Ort $\vec{r}_m$ befindet.

a) Bestimmen Sie mittels des Gauß'schen Gesetzes das von der elektrischen Ladung erzeugte elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ sowie das von der magnetischen Ladung erzeugte magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r})$. Zeigen Sie damit, dass der Gesamtimpuls

$$\vec{G} \equiv \vec{G}_{\text{EM}} = \int\int\int_{\mathbf{R}^3} \vec{g}_{\text{EM}}(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$

verschwindet. Dabei ist die Impulsdichte $\vec{g}_{\text{EM}}$ des elektromagnetischen Feldes gegeben durch $\vec{g}_{\text{EM}}(\vec{r}) = \epsilon_0\,\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$ (ohne Beweis).
(4 Punkte)

b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus a) den Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} \equiv \vec{L}_{\text{EM}} = \int\int\int_{\mathbf{R}^3} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{g}_{\text{EM}}(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$

und zeigen Sie, daß das Ergebnis sowohl unabhängig vom Bezugspunkt $\vec{r}_0$ als auch unabhängig vom Abstand der beiden Ladungen ist.
(4 Punkte)

c) Aus der Quantenmechanik übernehmen wir, daß der Drehimpuls quantisiert ist, d.h. nur diskrete Werte annehmen kann. Im vorliegenden Fall ergibt sich, dass der Drehimpuls nur die Werte $n\hbar/2$ mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ annehmen kann (ohne Beweis). Wie ergibt sich damit das Dirac'sche Argument? Verwenden Sie die in b) gewonnenen Ergebnisse.
(2 Punkte)

Hinweis: Bei den in a) und b) durchzuführenden Integrationen empfiehlt es sich, die Positionen der Punktladungen symmetrisch um den Ursprung auf die z-Achse zu legen und geeignete Koordinaten zu wählen. Weiterhin ist es nützlich, zu wissen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\zeta \int_0^{\infty} \mathrm{d}\sigma\, \frac{\sigma^3}{\left[\left((\sigma^2 + \zeta^2 + 1)^2 - 4\zeta^2\right]^{3/2}} = 1.$$

VIEL ERFOLG!!!