Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2010/2011
Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. K. Busch, Dr. R. Frank 26.11.2010
http://photonics.tfp.uni-karlsruhe.de/teaching kurt@tfp.uni-karlsruhe.de rfrank@tfp.uni-karlsruhe.de

Klassische Theoretische Physik III - Elektrodynamik
WS10/11

Übungsblatt 7 - 33 Punkte + 6 Zusatzpunkte
Abgabe bis Freitag, 03.12.10

Aufgabe 1 *Verwendung von Kugelflächenfunktionen* **(16 Punkte)**

Betrachten Sie eine metallische Kugel (Radius R_0), die sich auf konstantem Potential ϕ_0 und in einem homogenen äußeren elektrostatischen Feld $\vec{E} = (0, 0, E_0)$ befindet.

a) Bestimmen Sie die zwei (!) linear unabhängigen Lösungen des Radialteils der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten für eine durch die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ vorgegebene Winkelabhängigkeit.
(4 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Randbedingung für das Potential im Unendlichen. Benutzen Sie die Lösungen aus a) um einen (allgemein gültigen) Reihenansatz für das Potential im Endlichen aufzustellen. Welche Koeffizienten dieser Reihenentwicklung werden durch die Symmetrie des Problems und die Randbedingung im Unendlichen festgelegt und welche Werte ergeben sich?
(4 Punkte)

c) Bestimmen Sie die verbleibenden Koeffizienten der Reihenentwicklung aus der Forderung nach Ladungsneutralität der Kugel und der Tatsache, dass die Oberfläche der Kugel eine Äquipotentialfläche mit dem Wert $\phi(|\vec{r}| = R) = \phi_0$ darstellt.
(4 Punkte)

d) Bestimmen Sie zu dem in a) - c) erhaltenen Potential das zugehörige elektrische Feld. Welche Oberflächenladung wird auf der Kugel influenziert?
(4 Punkte)

Hinweis: Für Teilaufgabe a) ist es hilfreich, zu wissen, dass

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\,Y_{l,m}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2\,Y_{l,m}}{\partial\phi^2} + l(l+1)\,Y_{l,m} = 0$$

ist (siehe Vorlesung). Weiterhin empfiehlt sich für den Radialteil ein Potenzansatz.

Aufgabe 2 *Magnetfeld einer rotierenden geladenen Scheibe* **(10 Punkte)**

Eine unendlich dünne runde Scheibe (Radius R) trägt eine gleichmäßig verteilte Ladung Q und rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω.

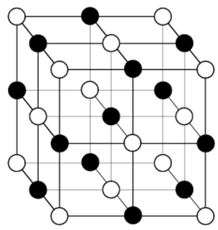
a) Welches Magnetfeld erzeugt sie auf ihrer Rotationsachse exakt? Bestimmen Sie den Integralausdruck allgemein und werten Sie ihn auf der Achse aus.
(4 Punkte)

b) Welches Magnetfeld erzeugt sie näherungsweise an einem beliebigen Ort in weiter Entfernung?
(3 Punkte)

c) Ab welchem Abstand vom Zentrum der Achse ist das Ergebnis aus b) eine gute Näherung (Abweichung $< 1\%$) für das exakte Ergebnis aus a)?
(3 Punkte)

Aufgabe 3 *Elektrostatik im Kristall-Gitter, numerisches Lösungsverfahren* **(7 Punkte)**

Ein einfaches elektrostatisches Modell eines NaCl-Kristalls besteht aus einer regelmäßigen Anordnung positiv geladener Na^+-Ionen und negativ geladener Cl^--Ionen an den Orten n.



a) Betrachten Sie nun die zwei Fälle:

* Im 1-dim. Fall (also einer Kette von Ionen) lautet die Poisson-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho_n$$

Finden Sie eine geeignete (dem Gitter entsprechende) numerisch verarbeitbare Darstellung für $\partial^2\phi/\partial x^2$, indem Sie dazu das Potential nur an den Orten (n) der Ionen berücksichtigen, und bilden Sie den Differenzenquotienten.
(1 Punkt)

** Verallgemeinern Sie die Darstellung aus (*) für den 2-dim. Fall, also eine Kristall-Ebene (Monolage) des Na-Cl-Kristalls und finden Sie eine Darstellung der Ladungsverteilung $-\frac{1}{\epsilon_0}\rho_{n_1,n_2}$.
(2 Punkte)

b) Im 1-dim. Fall sei die elektrostatische Wechselwirkungsenergie eines Na^+-Ions mit seinen beiden nächsten Nachbarn $W_i = 2e^2/a$. Hierbei ist e die Elementarladung und a der Abstand zwischen benachbarten Na^+- und Cl^--Ionen. Erweitern Sie diese Energie sukzessive um weitere Gitterplätze und finden Sie eine geeignete Reihendarstellung für die gesamte Wechselwirkungsenergie W. Welche bekannte Reihe finden Sie? Schließen Sie vom Wert der Reihe auf den Wert der elektrostatischen Wechselwirkungsenergie eines Gitterions im 1-dim. Fall.
(4 Punkte)

Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe) *Poisson-Gleichung auf dem Gitter: Hohler Metallwürfel* **(6 Punkte)**

Erweitern Sie das obige Verfahren auf drei Dimensionen indem Sie folgendes Problem numerisch betrachten:
Ein würfelförmiger Hohlraum der Kantenlänge $3a$ sei durch Metallwände begrenzt. Der Würfel werde nun in der Mitte parallel zu zwei Seitenflächen durchgeschnitten. An der einen Hälfte wird das Potential $\phi = \phi_0$ angelegt, an der anderen gelte $\phi = 0$. Die beiden Metallkörper seien voneinander isoliert.
Berechnen Sie das Potential im Inneren dieser Anordnung numerisch, indem Sie ein Gitter mit Gitterkonstante a auf den Würfel legen. In welchem Bereich der Anordnung wird diese numerische Lösung auch bei wesentlich kleineren Gitterkonstanten (z.B. $3a/100$) deutlich von der tatsächlichen Lösung ab?

VIEL ERFOLG!!!