Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1 *Helmholtz-Spulen*
(a)
Die zwei Leiterschleifen werden jeweils vom Strom I durchflossen und liegen parallel zur (x, y)-Ebene, haben beide den Radius R und ihre Mittelpunkte bei $(x, y, z) = (0, 0, b)$ und $(0, 0, -b)$.
Die dazugehörigen Stromdichten $\vec{j}$ sind also für Leiterschleife bei $z = b$

$$\vec{j}_1 = I\delta(\rho - R)\delta(z - b)\hat{e}_\phi$$

sowie für Leiterschleife bei $z = -b$

$$\vec{j}_2 = I\delta(\rho - R)\delta(z + b)\hat{e}_\phi$$

Für das Vektorpotential gilt allgemein die Beziehung

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \mathrm{d}\vec{r}'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Weiterhin gilt aufgrund der Symmetrie des Problems (und der Stromdichte)

$$\vec{A}(\vec{r}) = A(\rho, z)\hat{e}_\phi$$

wobei

$$\hat{e}_\phi = -\sin(\phi)\hat{e}_x + \cos(\phi)\hat{e}_y$$

betrachtet man nun z.B. die y-Komponente, so erhält man

$$A_y = A(\rho, z)\cos(\phi) = \frac{\mu}{4\pi}\int \mathrm{d}\vec{r}'\,\frac{I\delta(\rho' - R)\delta(z' - b)\cos(\phi')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

um $A(\rho, z)$ zu bestimmen genügt es offenbar obige Gleichung für $\phi = 0$ auszuwerten

$$A_1(\rho, z) = \frac{\mu}{4\pi}\int \mathrm{d}\vec{r}'\,\frac{I\delta(\rho' - R)\delta(z' - b)\cos(\phi')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

(der Index 1 bezieht sich hier auf die Leiterschleife bei $z = b$)
weiterhin gilt fuer das Volumenelement in Zylinderkoordinaten

$$\mathrm{d}\vec{r}' = \rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}z'$$

und mit $\vec{r} = (x, y, z) = (\rho, 0, z)$ (da ϕ ja null ist) und $\vec{r}' = (x', y', z') = (\rho'\cos(\phi'), \rho'\sin(\phi'), z')$

$$\begin{aligned}
|\vec{r} - \vec{r}'| &= \left((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right)^{1/2} \\
&= \left((\rho - \rho'\cos(\phi'))^2 + (0 - \rho'\sin(\phi'))^2 + (z - z')^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\rho^2 + \rho'^2\cos(\phi')^2 - 2\rho\rho'\cos(\phi') + \rho'^2\sin(\phi')^2 + (z - z')^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\phi') + (z - z')^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Somit folgt für das Vektorpotential der Leiterschleife bei $z = b$

$$\begin{aligned}
A_1(\rho, z) &= \frac{\mu}{4\pi}\int \rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}z'\,\frac{I\delta(\rho' - R)\delta(z' - b)\cos(\phi')}{\left(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\phi') + (z - z')^2\right)^{1/2}} \\
&= \frac{\mu I R}{4\pi}\int \mathrm{d}\phi'\,\frac{\cos(\phi')}{\left(\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos(\phi') + (z - b)^2\right)^{1/2}}
\end{aligned}$$

(dies ist ein sogenanntes elliptisches Integral)
Für die Leiterschleife $z = -b$ folgt analog

$$\begin{aligned}
A_2(\rho, z) &= \frac{\mu}{4\pi}\int \rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}z'\,\frac{I\delta(\rho' - R)\delta(z' + b)\cos(\phi')}{\left(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\phi') + (z - z')^2\right)^{1/2}} \\
&= \frac{\mu I R}{4\pi}\int \mathrm{d}\phi'\,\frac{\cos(\phi')}{\left(\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos(\phi') + (z + b)^2\right)^{1/2}}
\end{aligned}$$

Somit gilt für das gesamte Vektorpotential $A(\rho, z)$ nach Superposition $A(\rho, z) = A_1(\rho, z) + A_2(\rho, z)$ oder

$$A(\rho, z) = \frac{\mu I R}{4\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi'\left[\frac{\cos(\phi')}{\left(\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos(\phi') + (z - b)^2\right)^{1/2}} + \frac{\cos(\phi')}{\left(\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos(\phi') + (z + b)^2\right)^{1/2}}\right]$$

(b)
Die Entwicklung des Integranden bis zur geforderten Ordnung ergibt für den erste Summanden

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos(\phi')}{\left(\rho^2+R^2-2\rho R\cos(\phi')+(z-b)^2\right)^{1/2}} &= \frac{\cos(\phi')}{\sqrt{R^2+b^2}}+\frac{\cos^2(\phi')R\rho}{(R^2+b^2)^(3/2)} \\
&+ \frac{\cos(\phi')\left(\frac{3R^2\cos^2(\phi')}{2(R^2+b^2)^2}-\frac{1}{2(R^2+b^2)^2}\right)\rho^2}{(R^2+b^2)^(1/2)} \\
&+ \frac{\cos(\phi')\left(\frac{5R^3\cos^3(\phi')}{2(R^2+b^2)^3}-\frac{3R\cos(\phi')}{2(R^2+b^2)^2}\right)\rho^3}{(R^2+b^2)^(1/2)} \\
&+ \frac{\cos(\phi')bz}{(R^2+b^2)^(3/2)} \\
&+ \frac{3\cos^2(\phi')Rbz\rho}{(R^2+b^2)^(5/2)} \\
&+ \frac{\cos(\phi')\left(\frac{15b^2R\cos(\phi')}{2(R^2+b^2)^3}-\frac{3R\cos(\phi')}{2(R^2+b^2)^2}\right)\rho z^2}{(R^2+b^2)^(1/2)} \\
&+ \ldots
\end{aligned}
$$

der zweite Summand folgt analog (aber Vorzeichenwechsel bei den Termen linear in z)
Beim Ausführen der Winkelintegration ergeben alle ungeraden Potenzen des Cosinus Null, und

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \cos^2(\phi) &= \pi \\
\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \cos^4(\phi) &= \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}
$$

Somit gilt für das Vektorpotential $A(\rho,z)=A_1(\rho,z)+A_2(\rho,z)$

$$
\begin{aligned}
A(\rho,z) &= \frac{\mu I R}{4\pi}2\pi\frac{\rho R}{(R^2+b^2)^(3/2)}\left(1-\frac{3}{2}\frac{\rho^2+z^2}{R^2+b^2}+\frac{15}{8}\frac{\rho^2R^2+4b^2z^2}{(R^2+b^2)^2}+\mathcal{O}(\rho^4,z^4)\right) \\
&= \frac{\mu I R}{4\pi}2\pi\frac{\rho R}{(R^2+b^2)^(3/2)}\left(1+\frac{3}{8}\frac{R^2-4b^2}{R^2+b^2}(\rho^2-4z^2)+\mathcal{O}(\rho^4,z^4)\right)
\end{aligned}
$$

Wenn $R^2=4b^2$, d.h. wenn $R=D=2b$, dann fällt der zweite Term in der Klammer weg und es bleibt

$$
A(\rho,z)=\frac{\mu I R}{4\pi}2\pi\frac{\rho R}{(R^2+b^2)^(3/2)}
$$

setze $b^2=R^2/4$ (s.o.) dann folgt

$$
\begin{aligned}
A(\rho,z) &= \frac{\mu I}{4\pi}2\pi\frac{8}{5\sqrt{5}R}\rho \\
&= \mu I\frac{4}{5\sqrt{5}R}\rho
\end{aligned}
$$

das Magnetfeld ist dann weitgehend homogen, da

$$
\vec{B}\simeq B_z\hat{e}_z
$$

und

$$
B_z=\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho A\right]\simeq \mu I\frac{8}{5\sqrt{5}R}
$$

Diese Anordnung der Leiterschleifen ermöglicht also Experimente in einem (nahezu) homogenen Magnetfeld, obwohl das Magnetfeld einer einzelnen Leiterschleife inhomogen ist!

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2 *Dipol im externen Magnetfeld*

(a)

Die potentielle Energie W eines magnetischen Dipols $\vec{m}$ im äußeren Magnetfeld $\vec{B}$ ist $W = -\vec{m} \cdot \vec{B}$. Ein drehbar gelagerter magnetischer Dipol stellt sich im Gleichgewicht so ein, dass W minimal wird. Dies ist der Fall, wenn $\vec{m}$ in die Richtung von $\vec{B}$ zeigt. Wenn $\vec{B} = B_0 \hat{e}_x$, dann zeigt $\vec{m}$ also in die x-Richtung.

(b)

Der Draht mit der Stromdichte j erzeugt ein zusätzliches Magnetfeld $\vec{B}_D$ (Zylinderkoordinaten)

$$\vec{B}_D(\vec{r}) = \frac{\mu I}{2\pi\rho}\hat{e}_\phi = \frac{\mu I}{2\pi\rho}\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu I}{2\pi}\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

(im letzten Schritt mit $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ erweitert, also $z = 0$ gesetzt, wegen Symmetrie möglich)
Am Ort $\vec{d} = (d, 0, 0)$ des Dipols ist das effektive, d.h. das wirksame, Magnetfeld dann also

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_D(\vec{d}) = B_0\hat{e}_x + \frac{\mu I}{2\pi d}\hat{e}_y$$

Der Magnet stellt sich parallel zu diesem Magnetfeld ein und bildet damit einen Winkel α zur x-Achse

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\mu I}{2\pi d}\frac{1}{B_0}\right)$$

für kleine Winkel ist der arctan in etwa linear, dann gilt also

$$\alpha \simeq \frac{\mu I}{2\pi d}\frac{1}{B_0}$$

d.h. der Winkel ist proportional zur Stromstärke I und ermöglicht deshalb Strommessungen (Ampéremeter).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3 *Homogen magnetisierte Kugel*
Betrachte zunächst ein kleines Volumenelement an der Kugeloberfläche, das von den Flächenelementen

$$\mathrm{d}\vec{A}_> = R_>^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \hat{e}_r$$

und

$$\mathrm{d}\vec{A}_< = -R_<^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \hat{e}_r$$

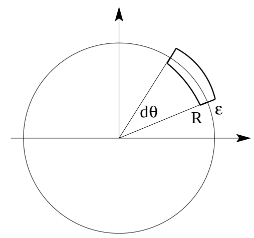
begrenzt ist (wobei $R_> = R + \epsilon$ und $R_< = R - \epsilon$ für $\epsilon \to 0$).
Aus

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

(gilt überall, also auch bei $r \simeq R$) folgt (Gaußscher Satz)

$$\oint_A \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\rightsquigarrow B_r^>(R) - B_r^< = 0 \tag{1}$$



Das skizzierte (fett gezeichnete) viereckige Element sei nun ein kleines Flächenelement. Seine Kontour C besteht (abgesehen von infinitisimalen Zwischenstücken) aus den Wegelementen

$$\mathrm{d}\vec{r} = R_> \mathrm{d}\theta \hat{e}_\theta$$

und

$$\mathrm{d}\vec{r} = -R_< \mathrm{d}\theta \hat{e}_\theta$$

wende hierauf das Ampére-Gesetz an ($\oint_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{B} = \mu \int_A \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{j} = \mu I$, wobei wir für diese Aufgabe (wie generell sehr häufig) $\mu = 1$ setzen wollen)

$$\left(B_\theta^>(R) - B_\theta^<(R)\right) R\mathrm{d}\theta = \frac{I(\theta)}{\pi R} \int_{R_<}^{R_>} \mathrm{d}r r \mathrm{d}\theta \delta(r - R) = \frac{I(\theta)}{\pi} \mathrm{d}\theta$$

$$\rightsquigarrow B_\theta^>(R) - B_\theta^<(R) = \frac{I(\theta)}{\pi R} \tag{2}$$

Die sphärischen Komponenten des gegebenen Magnetfelds sind

$B_r = B_0 \cos\theta$	$B_\theta = -B_0 \sin\theta$	$B_\phi = 0$	$(r \leq R)$
$B_r = 2m \cos\theta / r^3$	$B_\theta = m \sin\theta / r^3$	$B_\phi = 0$	$(r > R)$

Einsetzen der B_r Komponenten in Beziehung Gl. (1) liefert sofort

$$m = \frac{1}{2} B_0 R^3$$

und das Einsetzen der B_θ Komponenten in Beziehung Gl. (2) liefert

$$m \sin\theta / R^3 - -B_0 \sin\theta = \frac{I(\theta)}{\pi R}$$

$$I(\theta) = \pi R \left(\frac{m}{R^3} + B_0\right) \sin\theta$$

ausdrücken von B_0 durch das gerade gefundene m als $B_0 = 2m/R^3$ liefert

$$I(\theta) = \pi R \left(\frac{3m}{R^3}\right) \sin\theta$$