Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2010/2011
Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. K. Busch, Dr. R. Frank 17.12.2010
http://photonics.tfp.uni-karlsruhe.de/teaching kurt@tfp.uni-karlsruhe.de rfrank@tfp.uni-karlsruhe.de

Klassische Theoretische Physik III - Elektrodynamik
WS10/11

Übungsblatt 9 - 20 Punkte + 24 Zusatzpunkte

Abgabe bis Freitag, 14.01.11

Aufgabe 1 *Divergenz-Bedingungen der elektromagnetischen Felder* **(6 Punkte)**

Die Maxwell'schen Gleichungen lauten:

$$\partial_t \vec{H}(\vec{r},t) = -\frac{1}{\mu_0}\,\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{H}(\vec{r},t) = 0$$

$$\partial_t \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{\epsilon_0}\,\vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{r},t) - \frac{1}{\epsilon_0}\,\vec{j}(\vec{r},t) \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho(\vec{r},t).$$

Dabei haben wir $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ eingeführt.
Diese partiellen Differentialgleichungen können so gelesen werden, daß die beiden linken Gleichungen (die sogenannten Rotations-Gleichungen) die Zeitentwicklung der elektromagnetischen Felder beschreiben, während die rechten Gleichungen (die sogenannten Divergenz-Gleichungen) Nebenbedingungen an die Felder stellen.
Zeigen Sie: Wenn die Felder $\vec{H}$ und $\vec{E}$ die Divergenz-Gleichungen zu einem Zeitpunkt t_0 erfüllen und sie sich gemäß der Rotations-Gleichungen in der Zeit entwickeln, erfüllen sie (automatisch) die Divergenz-Gleichungen zu allen Zeiten $t > t_0$.

Aufgabe 2 *Maxwell'sche Gleichungen in dimensionslosen Einheiten* **(6 Punkte)**

Das Ergebnis von Aufgabe 1 bedeutet, daß sich das Lösen der Maxwell'schen Gleichungen auf die Lösung der Rotations-Gleichungen unter Verwendung geeigneter Anfangsbedingungen reduziert.
Wir betrachten die Rotations-Gleichungen ohne Ladungen und Ströme:

$$\partial_t \vec{H}(\vec{r},t) = -\frac{1}{\mu_0}\,\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t)$$
$$\partial_t \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{\epsilon_0}\,\vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{r},t)$$

Um diese Gleichungen einer numerischen Lösung zugänglich zu machen, ist es sinnvoll die Naturkonstanten ϵ_0 und μ_0 zu eliminieren. Untersuchen Sie, wie durch die Definition neuer Felder und durch eine Transformation der Zeitvariablen die Rotations-Gleichungen in dimensionslosen Einheiten geschrieben werden kann. D.h. bringen Sie die Gleichungen auf die Form

$$\partial_{\tilde{t}} \vec{\tilde{H}}(\vec{r},\tilde{t}) = -\vec{\nabla}\times\vec{\tilde{E}}(\vec{r},\tilde{t})$$
$$\partial_{\tilde{t}} \vec{\tilde{E}}(\vec{r},\tilde{t}) = \vec{\nabla}\times\vec{\tilde{H}}(\vec{r},\tilde{t}).$$

Aufgabe 3 *Reduktion der Maxwell'schen Gleichungen* **(8 Punkte)**

a) Reduktion auf zwei Dimensionen:
Wir betrachten ein System, das in z-Richtung homogen und isotrop ist und in dem Wellenausbreitung nur parallel zur xy-Ebene stattfindet (d.h. $\partial_z \vec{E} = \partial_z \vec{H} = 0$) . Zeigen Sie, daß dann die Rotations-Gleichungen (ohne Ladungen und Ströme, siehe Aufgabe 2), welche einen Satz von sechs gekoppelten Differentialgleichungen darstellen, in zwei (ungekoppelte) Sätze mit je drei gekoppelten Differentialgleichungen zerfallen.
(3 Punkte)

b) Reduktion auf eine Dimension:
Sofern das System aus Teilaufgabe a) auch in y-Richtung homogen und isotrop ist und Wellenausbreitung nur parallel zur x-Achse stattfindet, lassen sich jedes dieser Systeme von drei gekoppelten Differentialgleichungen aus Teilaufgabe a) auf ein Systeme mit je zwei gekoppelten Differetialgleichungen reduzieren. Führen Sie diese Reduktion durch.
(2 Punkte)

c) Aus Teilaufgabe b) ergeben sich für die Maxwell'schen Gleichungen in einer Dimension zwei verschiedene Systeme gekoppelter Differentialgleichungen. Warum reicht es dennoch aus, nur ein System zu betrachten?
(3 Punkte)

Zusatzaufgabe 1 *Es gibt keine magnetischen Felder* **(8 Punkte)**

Die Maxwell'schen Gleichungen sagen uns, daß

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \tag{1}$$

Dabei ist $\vec{B}$ das magnetische Feld. Wenden wir darauf den Gauß'schen Satz an, so ergibt sich

$$\int\int\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \int\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \tag{2}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Tatsache folgt, daß das magnetische Feld divergenzfrei ist (siehe Gl. (1)). Weiterhin haben wir (um notationstechnischen Verwechslungen mit dem Vektorpotential vorzubeugen) die zum Volumen V gehörige Fläche mit S bezeichnet. Außerdem wissen wir, daß sich ein divergenzfreies Vektorfeld durch ein Vektorpotential darstellen läßt, also

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{3}$$

Nun kombinieren wir die Gleichungen (2) und (3) zu

$$\int\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0, \tag{4}$$

wenden auf das Oberflächenintgral den Stokes'schen Satz an und erhalten

$$\int\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0. \tag{5}$$

Dabei ist C die zur Fläche S gehörende Randkurve. Die Gleichung

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{6}$$

sagt aber aus, daß das Vektorpotential ein konservatives Feld ist, so daß wir es als Gradientenfeld eines Potentials ψ schreiben können:

$$\vec{A} = \vec{\nabla}\psi. \tag{7}$$

Folglich ergibt eine Kombination der Gleichungen (3) und (7)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\psi\right) \equiv 0, \tag{8}$$

da die Rotation eines Gradientenfelds verschwindet.

Mit anderen Worten: Wir haben gezeigt, daß es kein Magnetfeld gibt!!!

Was ist faul?

Zusatzaufgabe 2 *Finite-Difference Time-Domain Methode in einer Dimension* **(16 Punkte)**

In dimensionslosen Einheiten (siehe Aufgabe 2) ergibt sich für die Maxwell'schen Gleichungen in einer Dimension (siehe Aufgabe 3):

$$\partial_t H_y(x,t) = \partial_x E_z(x,t)$$
$$\partial_t E_z(x,t) = \partial_x H_y(x,t).$$

a) Um diese Gleichungen einer numerischen Lösung zuzuführen, müssen sie in Zeit und Ort diskretisiert werden. Die Finite-Difference Time-Domain (FDTD) verwandelt alle Differentialquotienten in Differenzenquaotienten, bedient sich aber einer speziellen Diskretisierung bei der E- und H-Felder nicht auf dem selben Gitter dargestellt werden. Stattdessen werden zwei versetzte Gitter verwendet, bei denen das Gitter für das H-Feld in Zeit *und* Ort um eine halbe Schrittweite relativ zum Gitter des E-Feld verschoben ist.
D.h. wenn die Schrittweiten in Ort und Zeit Δx und Δt sind, ist das Gitter für das E-Feld gegeben durch $x_i^E = i\Delta x$ und $t_n^E = n\Delta t$ mit $i, n \in \mathbb{N}$ und für das Gitter des H-Felds gilt entsprechend $x_i^H = (i + 1/2)\Delta x$ und $t_n^H = (n + 1/2)\Delta t$ mit $i, n \in \mathbb{N}$. Weiterhin werden alle Differentialoperatoren durch zentrale Differenzen approximiert, d.h.

$$\frac{\partial f(r)}{\partial r} \approx \frac{f(r + \Delta r/2) - f(r - \Delta r/2)}{\Delta r}, \tag{9}$$

wobei r für t oder x steht.
Bestimmen Sie sogenannte Update-Gleichungen indem Sie die Maxwell'schen Gleichungen in einer Dimension wie oben beschrieben diskretisieren und nach den Feldvariablen mit dem spätesten Zeitindex auflösen.
(6 Punkte)

b) Implementieren Sie das in a) erhaltene FDTD-Verfahren. Dabei sollten Sie sicherstellen, dass der erste und letzte Gitterpunkt ein Punkt des E-Felds darstellt. Setzen Sie die Werte an diesen Randpunkten stets zu Null (Perfekte metallische Randbedingung).
Weiterhin wollen wir den ersten nichtverschwindenden Punkt des E-Gitters als Quelle benutzen. Setzen Sie dazu den Wert des Feldes an disesm Punkt als Funktion der Zeit auf definierte Werte indem Sie verschiedene Pulsformen (z.B. Rechteck- oder Gauß-Puls, Sinus-Funktion) zulassen. Für alle anderen Punkte verwenden Sie die Update-Gleichungen aus Teilaufgabe a).
Untersuchen Sie, wie sich verschiedene Diskretisierungen (z.B. $\Delta t = 0.99\Delta x$ und $\Delta t = 1.01\Delta x$) sowie verschiedene Auflösungen (z.B. verschiedene Anzahlen von Gitterpunkten bei fester Oszillationsperiode der Sinus-Quelle) auswirken.
(10 Punkte)

FROHES FEST UND GUTEN RUTSCH INS NEUE JAHR!!!