Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2010/2011
Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. K. Busch, Dr. R. Frank 14.01.2011
http://photonics.tfp.uni-karlsruhe.de/teaching kurt@tfp.uni-karlsruhe.de rfrank@tfp.uni-karlsruhe.de

Klassische Theoretische Physik III - Elektrodynamik
WS10/11

Übungsblatt 10 - 30 Punkte
Abgabe bis Freitag, 21.01.11

Aufgabe 1 *Fouriertransformation* **(10 Punkte)**

Die Fouriertransformation (FT) $\mathscr{F}\{\varphi\}$ einer Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\mathscr{F}\{\varphi\}(\vec{k}\,) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^n x \, \varphi(\vec{x}\,) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

Zur Unterscheidung von Funktion und Fouriertransformierter schreibt man auch $\vec{k}$ statt $\vec{x}$ als Argument und läßt dafür das Symbol $\mathscr{F}$ weg.

a) Zeigen Sie, daß die FT einer Ableitung eine Multiplikation ergibt (2,5 Punkte)

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi\right\}(\vec{k}\,) = ik_\alpha \mathscr{F}\{\varphi\}(\vec{k})$$

b) Zerlegen Sie die Funktion $\varphi(x)$ in ihren geraden $\varphi_e(x)$ und ungeraden $\varphi_o(x)$ Anteil bezüglich der Variable x, also $\varphi(x) = \varphi_e(x) + \varphi_o(x)$. Berechnen Sie nun die Fouriertransformierte $\varphi(k)$ und geben Sie deren Real- und Imaginärteil an. (2,5 Punkte)

c) Die Faltung zweier Funktionen φ_1 und φ_2 ist definiert als (2,5 Punkte)

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \; \varphi_1(x-y) \; \varphi_2(y).$$

Zeigen Sie, daß die FT ein Produkt in eine Faltung überführt

$$\sqrt{2\pi} \cdot \mathscr{F}\left\{\varphi_1 \cdot \varphi_2\right\}(x) \equiv \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi}} \varphi_1(k)\, \varphi_2(k)\, e^{ikx} = (\varphi_1 * \varphi_2)(x).$$

d) Zeigen Sie mittels der Ergebnisse aus den vorigen Teilaufgaben, daß eine Ableitung in einen der beiden Faktoren gezogen werden kann (2,5 Punkte)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\varphi_1 * \varphi_2\right]\right)(\vec{x}\,) = \left(\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi_1\right] * \varphi_2\right)(\vec{x}\,) = \left(\varphi_1 * \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi_2\right]\right)(\vec{x}\,)$$

Aufgabe 2 *Fouriertransformation eines Gauß'schen Wellenpakets* **(12 Punkte)**

Die unendlich ausgedehnte, monochromatische (ebene) Welle ist eine Idealisierung, die in der Natur nicht zu finden ist. Alle Experimente der Elektrodynamik und der Optik arbeiten mit begrenzten Wellengruppen bzw. Wellenpaketen. Hier betrachten wir ein solches Wellenpaket bei $x = 0$ von der Form

$$\Psi(0,t) = c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{4}(\omega-\omega_0)^2} e^{-i\omega\, t} \mathrm{d}\omega$$

wobei c eine noch zu bestimmende Normierungskonstante ist. Das Wellenpaket entsteht durch (lineare) Superposition von ebenen Wellen $e^{i\omega\, t}$ deren Koeffizienten eine Gauß - Verteilung aufweisen (Symmetriezentrum bei $\omega = \omega_0$).

Bei der Berechnung von $\Psi(0,t)$ treten wiederholt Integrale der Form

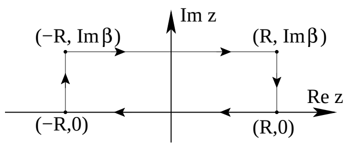
$$I(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2(\tau-\beta)^2} \mathrm{d}\tau$$

mit komplexen Koeffizienten α und β auf (Konvergenzbedingung: $\mathrm{Re}\,\alpha^2 > 0$).

a) Zeigen Sie, daß gilt: (3 Punkte)

$$I(1,\beta) = I(1,0)$$

Um die Unabhängigkeit des Integrals von β zu zeigen, können Sie den Residuensatz (s. u.) verwenden und einen geeigneten Integrationsweg in der komplexen Ebene (Vorschlag siehe Skizze)wählen.



b) Zeigen Sie, daß gilt: (3 Punkte)

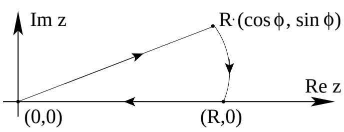
$$I(1,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} \mathrm{d}\tau = \sqrt{\pi}$$

Benutzen Sie ebene Polarkoordinaten und lösen Sie das Integral elementar.

c) Zeigen Sie, daß gilt: (3 Punkte)

$$I(\alpha,0) = \frac{1}{\alpha} I(1,0)$$

Stellen Sie α in der Form $\alpha = |\alpha| e^{i\phi}$ dar, eleminieren Sie $|\alpha|$ durch Substitution und berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(e^{i\phi}\tau\right)^2} \mathrm{d}\tau$ mit Hilfe eines geeigneten Integrationswegs in der komplexen Ebene (Vorschlag siehe Skizze).



d) Berechnen Sie einen expliziten Ausdruck für das Wellenpaket $\Psi(x,0)$. (3 Punkte)

Hinweis: Der Residuensatz in einfacher Form lautet

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f, z_k)$$

wobei die z_k die vom geschlossenen Weg γ eingeschlossenen Sigularitäten (N Stück) der Funktion $f(z)$ sind. Hat $f(z)$ im dem vom Integrationsweg eingeschlossenem Gebiet keine Pole, dann folgt $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} f(w)\mathrm{d}w$$

heißt das *Residuum* der Funktion f an der Stelle z_0.

Aufgabe 3 *Eigenschaften des fouriertransformierten Gauß'schen Wellenpakets* **(8 Punkte)**

Wir betrachten hier ein Wellenpaket analog dem aus der vorherigen Aufgabe (vgl. Aufgabe 2)

$$\Psi(x,0) = Ce^{-ax^2+bx}$$

mit komplexen Koeffizienten a, b und C, wobei $\mathrm{Re}\, a > 0$.

a) Berechnen Sie die Norm $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x |\Psi(x,0)|^2$ dieses Wellenpaktes. (2 Punkte)

b) Geben Sie die Koeffizienten $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ und $\widetilde{C}$ der Fouriertransformierten an (2 Punkte)

$$\Psi(k,0) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}} \Psi(x,0)e^{-ikx} = \widetilde{C}e^{-\tilde{a}k^2+\tilde{b}k}$$

c) Verifizieren Sie, dass die Norm im Orts- und Impulsraum $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k|\Psi(k,0)|^2\right)$ äquivalent ist. (2 Punkte)

d) Skizzieren Sie $|\Psi(x,0)|^2$ und $|\Psi(k,0)|^2$, interpretieren Sie das Ergebnis. (2 Punkte)

VIEL ERFOLG!!!