Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2010/2011
Institut für Theoretische Festkörperphysik
Prof. Dr. K. Busch, Dr. R. Frank 28.01.2011
http://photonics.tfp.uni-karlsruhe.de/teaching kurt@tfp.uni-karlsruhe.de rfrank@tfp.uni-karlsruhe.de

Klassische Theoretische Physik III - Elektrodynamik
WS10/11

Übungsblatt 12 - 22 Punkte + 22 Zusatzpunkte
Abgabe bis Freitag, 04.02.11

Aufgabe 1 *Galileitransformation* **(6 Punkte)**

In einem Inertialsystem gelte die Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi(x,t) = 0.$$

Ein anderes Bezugssystem K' bewegt sich gleichförmig relativ zu K in positiver x-Richtung, $x' = x - vt$.

a) Welches Feld $\Psi'(x',t)$ wird in K' bei x' für gegebenes $\Psi(x,t)$ beobachtet? Welches $\Psi(x,t)$ in K für gegebenes $\Psi'(x',t)$ in K'? (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Wellengleichung für $\Psi'(x',t)$. (2 Punkte)

c) Geben Sie $\Psi'(x',t)$ an, für den Fall einer harmonischen ebenen Welle $\Psi(x,t) = A\exp(ik|x-ct|)$, und zeigen Sie, daß Ψ' die in b) abgeleitete Wellengleichung löst. (2 Punkte)

Aufgabe 2 *Lorentz-Transformation von $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld* **(6 Punkte)**

Die Lorentz-Transformation eines 4-Vektors $x = (x^0, \vec{x})$ mit beliebigem Boostparameter $\vec{\beta}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}$ kann explizit als

$$x^{0\prime} = \gamma(x^0 - \vec{\beta}\cdot\vec{x})$$

$$\vec{x}\prime = \vec{x} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{x})\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta}x^0$$

geschrieben werden.

a) Bestimmen Sie daraus explizit die Komponenten $L^0_0, L^0_i = L^i_0, L^i_j$ eines Lorentz-Boosts L. $i,j = 1,2,3$ sind dabei die räumlichen Komponenten. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie nun explizite Formeln für die Transformation von $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld aus der bekannten Transformationseigenschaft des Feldstärke*tensors* $F^{\mu\nu}$. (3 Punkte)

Aufgabe 3 *Dualität der Maxwell'schen Gleichungen Teil II* **(10 Punkte)**

Auf dem Übungsblatt 4 haben Sie die Dualtitätstransformation der Maxwell'schen Gleichungen kennen gelernt. Betrachten Sie den Spezialfall $\zeta = \pi/2$, für den die Maxwell'schen Gleichungen die Form

$$\nabla \cdot \tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = 0 \qquad \nabla \times \tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = -\tilde{\vec{j}}_m(\vec{r},t) - \partial_t \tilde{\vec{B}}(\vec{r},t)$$
$$\nabla \cdot \tilde{\vec{B}}(\vec{r},t) = \tilde{\rho}_m(\vec{r},t) \qquad \nabla \times \tilde{\vec{B}}(\vec{r},t) = \mu_0 \epsilon_0 \, \partial_t \tilde{\vec{E}}(\vec{r},t)$$

annehmen. Dabei ist $\tilde{\rho}_m(\vec{r},t)$ die "magnetische" Ladungsdichte und $\tilde{\vec{j}}_m(\vec{r},t)$ die "magnetische" Stromdichte.

a) Stellen Sie die Felder $\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t)$ und $\tilde{\vec{B}}(\vec{r},t)$ durch geeignete "magnetische" Potentiale $\tilde{\phi}_m(\vec{r},t)$ und $\tilde{\vec{A}}_m(\vec{r},t)$ dar und bestimmen Sie die erlaubten Eichtransformationen.
(4 Punkte)

b) Leiten Sie mittels einer geeigneten "magnetischen" Lorenz-Eichung entkoppelte Wellengleichungen für die "magnetischen" Potentiale her.
(4 Punkte)

c) Zeigen Sie mittels der Ergebnisse der Vorlesung (d.h. für den Fall $\zeta = 0$) sowie dem in a) und b) diskutierten Fall $\zeta = \pi/2$, dass für beliebige Werte ζ der Dualitätstransformation gilt

$$\tilde{\vec{E}} = -\nabla\tilde{\phi}_e - \partial_t \tilde{\vec{A}}_e - \nabla \times \tilde{\vec{A}}_m$$
$$\tilde{\vec{B}} = -\nabla\tilde{\phi}_m - \partial_t \tilde{\vec{A}}_m + \nabla \times \tilde{\vec{A}}_e$$

(2 Punkte)

Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe) *Photon im Magnetfeld der Erde* **(22 Punkte)**

Betrachten Sie die sogenannte statische *Proca-Gleichung*. Dieses Modell kann man dazu benutzen, um die beobachtbaren Effekte einer endlichen Photonenmasse auf das Magnetfeld der Erde zu untersuchen. Die Proca-Gleichung führt für endliche Masse statt auf das sonst übliche Coulomb-Potential auf ein Yukawa-Potential (vergl. Blatt6 Aufgabe 3). Als Spezialfall der Proca-Gleichung für masselose Teilchen ergeben sich die quellenfreien Maxwell-Gleichungen. Die Proca-Gleichung für eine lokalisierte stationäre Stromverteilung, die nur ein statisches magnetisches Moment besitzt, hat folgende Form:

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}^2\vec{A} - \mu^2\vec{A} = -\vec{j}$$

Zu beachten ist dabei, daß sich die Stromdichte, wenn $M(\vec{r})$ die Magnetisierung ist, in der Form $\vec{J} = \mu_0(\vec{\nabla} \times \vec{M})$ schreiben läßt. μ entspricht der Compton-Wellenlänge des Photons und hat die Dimension einer inversen Länge:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\hbar}{m_{Photon} \cdot c}$$

a) Es sei $\vec{M} = \vec{m} f(\vec{r})$, wobei $\vec{m}$ ein fester Vektor und $f(\vec{r})$ eine auf ein endliches Gebiet beschränkte skalare Funktion ist. Zeigen Sie, daß nun das Vektorpotential folgende Gestalt hat:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{m} \times \vec{\nabla} \int f(\vec{r}') \frac{e^{-\mu|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

b) Zeigen Sie, daß ein als punktartig angenommener magnetischer Dipol im Ursprung des Koordinatensystems ein magnetisches Feld der Form

$$\vec{B}(\vec{r}) = [3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}](1 + \mu r + \frac{\mu^2 r^2}{3}) \frac{e^{-\mu r}}{r^3} - \frac{2}{3}\mu^2 \vec{m} \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

besitzt.

c) Das Zwischenergebnis aus (b) zeigt, daß das Erdmagnetfeld für $\mu \neq 0$ bei festem Radius $r = R$ (d.h. auf der Erdoberfläche) als magnetische Dipolverteilung mit einer zusätzlichen konstanten Richtung in Erscheinung tritt. Messungen mit Satelliten und auf der Erdoberfläche führen zu dem Schluß, daß dieses "zusätzliche" Feld kleiner ist, als das mit $4 \cdot 10^{-3}$ mutliplizierte Dipolfeld am magnetischen Äquator. Geben Sie unter Verwendung dieser Meßergebnisse die Abschätzung für die obere Schranke von μ in Einheiten des reziproken Erdradius und in Gramm an.

Diese Methode zur Abschätzung der Photonenmasse μ geht auf E. Schrödinger zurück, Proc. Roy Irish Acad. A49, 135 (1943). Siehe auch A.S.Goldhaber und M.M.Nieto, Phys. Rev. Lett. 21, 567 (1968).

VIEL ERFOLG!!!

Information zur Prüfungsanmeldung

Die elektronische Anmeldung für Bsc-Studiengänge (Physik, Mathematik, Geophysik) zur Prüfungs - Vorleistung ist ab sofort vom Studienbüro freigeschaltet und bleibt bis zum 13.2.2011 offen.

Sobald Sie sich dort angemeldet haben, und die erforderliche Vorleistung erbracht wurde, schalten wir Sie für die Prüfung am 15.2.2011 frei.

Also müssen Sie sich nochmal auf dem Portal des Studienbüros, dann aber für diese Prüfungsleistung anmelden.
Die Frist für die Prüfungsanmeldung läuft vom 7.2.2011 bis 13.2.2011.

Die Abmeldefrist (elektronisch) ist der 14.2.2011.

Alle anderen Studiengänge benötigen nach wie vor sogn. blaue Zettel.

Die vorläufige Verteilung der Studenten auf die Prüfungsorte wird am Montag den 14.2.2011 mit Matrikelnummern vor dem Lehmann-Hörsaal ausgehängt und ausserdem auf der homepage bekanntgegeben.

Bitte beachten Sie weiterhin die neuen Regelungen zum Wechsel der Studienordnung bis 1.3.2011.