Übungen zur Theoretischen Physik C für Lehramtskandidaten/Moderne
Theoretische Physik für Meteorologen und Geophysiker, WS 2010/11 Blatt 0
Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S. Thambyahpillai Besprechung 22. 10. 10

Wir benutzen auf den Übungsblättern meistens cgs-Einheiten. Auf einem der folgenden Übungsblatter wird es eine Aufgabe zur Umrechnung von Einheitensystemen geben. Dieses Übungsblatt ist nur für die Praxis.
*

Aufgabe 1: δ–Distribution 0

i) Die Dirac'sche Delta-Funktion (genauer Distribution) kann dargestellt werden als

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{a\to 0} \frac{1}{a} e^{-x^2/a^2}\,, \quad a > 0.$$

Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \delta(x) = 1\,; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \delta(x) f(x) = f(0)\,; \quad \delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x), c \neq 0\,;$$

$$x\delta(x) = 0\,; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \delta'(x) f(x) = -f'(0)\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie *nur* das Gauß'sche Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2/a^2} = \sqrt{\pi} a,$$

sowie die Taylor-Entwicklung für $f(x)$ um $x = 0$.

ii) Die Darstellung $2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx}$ soll durch Auswertung von $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx-\epsilon k^2}$ und Rückführung auf die obige Darstellung der δ-Funktion abgeleitet werden.

iii) Berechnen sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x^3 \delta(x^2 - 3x + 2)$$

*19. Oktober 2010 14:19 Uhr

Aufgabe 2: Vektoralgebra 0

Zeigen Sie, daß

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = -\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) + \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})),$$

sowohl in Vektor- als auch in Indexnotation (in letzterer gilt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$, wobei ϵ_{ijk} der vollständig antisymmetrische Tensor ist und über zweimal vorkommende Indizes summiert wird).

Aufgabe 3: Nabla-Operator in kartesischen Koordinaten 0

i) Berechnen Sie (wobei $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$)

$$\nabla r\,, \quad \nabla \cdot \vec{r}\,, \quad \nabla \times \vec{r}\,, \quad \nabla f(r)\,, \quad \nabla \times (f(\vec{r})\frac{\vec{r}}{r}).$$

ii) Es seien $\vec{v}(\vec{r})$, $\vec{w}(\vec{r})$ stetig differenzierbare Vektorfelder. Zeigen Sie, daß in kartesischen Koordinaten gilt

$$\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w}(\nabla \times \vec{v}) - \vec{v}(\nabla \times \vec{w}),$$

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\nabla \vec{w}) - \vec{w}(\nabla \vec{v}) + (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w},$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0,$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}.$$

Aufgabe 4: Fourier-Transformation 0

Gegeben sei die quadratintegrable Funktion $f(x)$. Die Fourier-Transformation ist definiert durch

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \widetilde{f}(k)\,, \quad \widetilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} f(x).$$

i) Berechnen Sie die Fouriertransformierten von $xf(x)$ und $f'(x)$.

ii) Wie lautet die Fouriertransformierte der δ-Funktion?