ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK C FÜR LEHRAMTSKANDIDATEN / MODERNE THEORETISCHE PHYSIK FÜR METEOROLOGEN UND GEOPHYSIKER

BLATT 9

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 07. 01. 11
Besprechung: 07. 01. 11

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1
Wolfgang Hollik

☐ Gruppe 2
Ramona Gröber

*

Aufgabe 1: Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets 3

f sei die Überlagerung dreier Sinuswellen,

$$f(x,t) = \sin(\omega t - kx) + \sin((\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x) + \sin((\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x)\,,$$

wobei $\Delta\omega \ll \omega$, $\Delta k \ll k$.

i) Schreiben Sie f um in die Form *2P*

$$f(x,t) = \sin(\omega t - kx)\, B(x - v_g t)\,,$$

und bestimmen Sie die Gruppengeschwindigkeit v_g der Einhüllenden B.

ii) Kann man die Parameter ω, k, $\Delta\omega$, Δk so wählen, daß die Gruppengeschwindigkeit v_g der Phasengeschwindigkeit $v_\phi \equiv \omega/k$ entgegengesetzt ist, daß also $v_g = -v_\phi$ gilt? *1P*

---

* 16. Dezember 2010 12:51 Uhr

(bitte wenden)

Aufgabe 2: Fouriertransformation 6

Die Fouriertransformation einer integrablen und quadratintegrablen† komplexwertigen Funktion $\psi(x)$ ist definiert als

$$\tilde{\psi}(k) := (\mathcal{F}\psi)(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi(x)\, \mathrm{e}^{-ikx}\,.$$

Die inverse Fouriertransformation lautet

$$(\mathcal{F}^{-1}\tilde{\psi})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \tilde{\psi}(k)\, \mathrm{e}^{ikx}\,.$$

i) Zeigen Sie: $(\mathcal{F}\psi')(k) = ik\tilde{\psi}(k)$. Hierbei ist $\psi'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}$. *1P*

ii) Zeigen Sie: *1P*

$$\left(\mathcal{F}(\psi_1\psi_2)\right)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\, \tilde{\psi}_1(q)\, \tilde{\psi}_2(k-q)\,.$$

Dabei bezeichnet $\psi_1\psi_2$ das punktweise Produkt, also $(\psi_1\psi_2)(x) = \psi_1(x)\psi_2(x)$.

iii) Für Funktionen $\psi(x)$ definieren wir Verschiebung τ_a, Phasenverschiebung μ_b und Skalentransformation δ_λ durch *3P*

$$\begin{aligned}
(\tau_a\psi)(x) &:= \psi(x-a) \qquad (a \in \Re)\,,\\
(\mu_b\psi)(x) &:= \mathrm{e}^{ibx}\,\psi(x) \qquad (b \in \Re)\,,\\
(\delta_\lambda\psi)(x) &:= \lambda^{-1/2}\,\psi(x/\lambda) \qquad (\lambda > 0)\,.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\tau_a\psi)(k) &= \mathrm{e}^{-ika}\tilde{\psi}(k)\,,\\
(\mathcal{F}\mu_b\psi)(k) &= \tilde{\psi}(k-b)\,,\\
(\mathcal{F}\delta_\lambda\psi)(k) &= \lambda^{1/2}\,\tilde{\psi}(\lambda k)\,.
\end{aligned}$$

iv) Zeigen Sie: *1P*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, |\widetilde{\psi}(k)|^2\,.$$

Dies ist der Satz von Plancherel, manchmal auch Parsevalsche Formel genannt.

†integrabel: $\int_{\Re} \mathrm{d}x\, \psi(x)$ existiert, quadratintegrabel: $\int_{\Re} \mathrm{d}x\, |\psi(x)|^2 < \infty$.

(bitte wenden)

Aufgabe 3: Hermitesche Matrizen 3

Die Transponierte einer Matrix A ist definiert als die Matrix mit den Komponenten

$$(A^T)_{mn} = A_{nm} \,.$$

Wir definieren außerdem die konjugiert komplexe Matrix A^* als die Matrix mit den Komponenten

$$(A^*)_{mn} = A^*_{mn} \,.$$

Wir stellen ferner fest, daß die Transposition und komplexe Konjugation kommutativ sind, was bedeutet: $(A^T)^* = (A^*)^T$. Daraus ergibt sich, dass die Hintereinanderausführung dieser beiden Operationen (in beliebiger Reihenfolge) zum gleichen Ergebnis führt, nämlich zur sogenannten hermitesch konjugierten Matrix (benannt nach dem französischen Mathematiker Charles Hermite, 1822-1901). Wir bezeichnen diese als $A^\dagger$. Stimmt eine hermitesch konjugierte Matrix mit der ursprünglichen Matrix überein, so bezeichnet man diese als hermitesch. In anderen Worten ist die Matrix A genau dann hermitesch, wenn $A = A^\dagger$ ist. Offensichtlich muss eine hermitesche Matrix also quadratisch sein. Weiterhin gilt die Identität

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \,,$$

für ein Produkt zweier Matrizen A und B.

i) Ein Skalar λ ist genau dann ein Eigenwert der (quadratischen) Matrix A, wenn es einen Spaltenvektor χ gibt, so dass *1P*

$$A\chi = \lambda\chi \,,$$

gilt. Beweisen Sie, daß die Eigenwerte einer hermiteschen Matrix immer reell sind.

ii) Beweisen Sie, daß die Eigenvektoren einer hermiteschen Matrix orthogonal sind (vorausgesetzt, es handelt sich um Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten). *2P*