ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK C FÜR LEHRAMTSKANDIDATEN / MODERNE THEORETISCHE PHYSIK FÜR METEOROLOGEN UND GEOPHYSIKER

BLATT 10

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 12. 01. 11
Besprechung: 14. 01. 11

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1
Wolfgang Hollik

☐ Gruppe 2
Ramona Gröber

*

Aufgabe 1: Hamiltonsche Mechanik 5

Die Lagrangefunktion für ein Punktteilchen der Masse m und Ladung e in einem vorgegebenen zeitunabhängigen elektromagnetischen Feld lautet:

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \, \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}} - e \, \Phi(\vec{x}) \, .$$

i) Bestimmen Sie den zu $\vec{x}$ kanonisch konjugierten Impuls $\vec{p}$. [Hinweis: $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}$] *1P*

ii) Bestimmen Sie mittels Legendretransformation die Hamiltonfunktion $H(p_k, x_k) = \sum_k p_k \dot{x}_k - L$. *1P*

iii) Finden Sie – ausgehend von der Hamiltonfunktion – die Bewegungsgleichungen: *3P*

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} = -\dot{p}_k \, , \qquad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{x}_k \, .$$

Bringen Sie diese auf die Form $m \, \ddot{\vec{x}} = \vec{F}$, wobei $\vec{F}$ durch die Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$ auszudrücken ist. [Hinweis: Benutzen Sie $\dot{A}_k = \dot{x}_j \frac{\partial A_k}{\partial x_j}$ und $(\vec{v} \times \vec{B})_n = \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_n} - \dot{x}_k \frac{\partial A_n}{\partial x_k}$.]

*7. Januar 2011 13:00 Uhr

(bitte wenden)

Aufgabe 2: Klassische Potentialstufe 3

Wir betrachten ein klassisches Punktteilchen der Masse m in einer Dimension im Potential $V(x) = V_0\theta(x)$ (θ ist die Heaviside-Funktion). Stellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung auf und finden Sie die allgemeine Lösung.

Hinweis: Betrachten Sie die Bereiche $x < 0$ [mit dem Weg-Zeit-Gesetz $x(t) = v_1 t + x_1$] und $x > 0$ [mit dem Weg-Zeit-Gesetz $x(t) = v_2 t + x_2$] zunächst getrennt und setzen Sie $x(t)$ stetig zusammen. Setzen Sie dann $x(t)$ in die Newtonsche Gleichung [$m\ddot{x}(t) = -V_0\delta(x - x_0)$] ein. Multiplizieren Sie mit $\dot{x}$ und integrieren Sie.

Aufgabe 3: Potentialtopf: Transfermatrix und Streuzustände 4

i) Wir betrachten zunächst die Potentialstufe $V(x) = V_1 + \theta(x - x_0)\,(V_2 - V_1)$. Wie Sie aus der Vorlesung wissen, hat die Wellenfunktion eines stationären Zustandes die Form *2P*

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1\,\mathrm{e}^{ik_1x} + B_1\,\mathrm{e}^{-ik_1x} & (x \le x_0)\,, \\ A_2\,\mathrm{e}^{ik_2x} + B_2\,\mathrm{e}^{-ik_2x} & (x > x_0)\,. \end{cases}$$

Geben Sie k_1, k_2 in Abhängigkeit von der Energie E des Zustands und von V_1, V_2 an. Dabei sei entweder $k_i \ge 0$ oder $k_i = i\kappa_i$ mit $\kappa_i \ge 0$. Wir definieren die Transfermatrix $M(x_0; k_1, k_2)$ durch:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M(x_0; k_1, k_2) \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}\,.$$

Bestimmen Sie die komplexe 2×2-Matrix $M(x_0; k_1, k_2)$, indem Sie die Anschlußbedingungen an der Stelle x_0 auswerten. [Hinweis: Setzen Sie $\psi(x)$ und $\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}$ für $x = x_0$ stetig zusammen.]

ii) Wir betrachten nun den Potentialtopf *2P*

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 < 0 & \text{falls } 0 < x \le b\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Stellen Sie einen Ansatz für die Wellenfunktion stationärer Zustände auf. Mit Hilfe der Transfermatrix aus Aufgabenteil a) können Sie die Anschlußbedingungen lösen. Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen den Ansatzkoeffizienten für $x > b$ und denen für $x < 0$ her, indem Sie zwei Transfermatrizen multiplizieren. Ist dieser Zusammenhang linear?