ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK C FÜR LEHRAMTSKANDIDATEN / MODERNE THEORETISCHE PHYSIK FÜR METEOROLOGEN UND GEOPHYSIKER

BLATT 13

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 02. 02. 11
Besprechung: 04. 02. 11

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1
Wolfgang Hollik

☐ Gruppe 2
Ramona Gröber

*

Aufgabe 1: Drehimpuls 5

Die Vertauschungsrelationen für die quantenmechanischen Drehimpulsoperatoren J_1, J_2, J_3 lauten: $[J_i, J_k] = i\hbar \sum_l \epsilon_{ikl} J_l$. Wir definieren $\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ und $J_\pm = J_1 \pm i J_2$. Es gelten die folgenden Eigenschaften:

$$[\vec{J}^2, J_k] = 0\,, \quad (1) \qquad J_\pm^\dagger = J_\mp\,, \quad (2)$$

$$[J_3, J_\pm] = \pm\hbar\, J_\pm\,, \quad (3) \qquad [J_+, J_-] = 2\hbar\, J_3\,, \quad (4)$$

$$\vec{J}^2 - J_3^2 = \frac{1}{2}\left(J_+ J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+\right)\,, \quad (5) \qquad J_- J_+ = \vec{J}^2 - J_3^2 - \hbar J_3\,, \quad (6)$$

$$J_+ J_- = \vec{J}^2 - J_3^2 + \hbar J_3\,. \quad (7)$$

i) Beweisen Sie die Gleichungen (3), (4) und (6). *2P*

ii) Da $\vec{J}^2$ mit J_3 vertauscht, besitzen diese Operatoren gemeinsame Eigenzustände $\psi_{j,m}$. Weiter kann $\vec{J}^2$ keine negativen Eigenwerte haben. Daher können wir schreiben: *1P*

$$\vec{J}^2 \psi_{j,m} = \hbar^2\, j(j+1)\, \psi_{j,m}\,, \qquad J_3 \psi_{j,m} = m\hbar\, \psi_{j,m}\,.$$

*20. Januar 2011 16:16 Uhr

(bitte wenden)

mit $j \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, $j \geq 0$. Zeigen Sie: $J_{\pm}\psi_{j,m}$ ist entweder null oder wieder ein Eigenzustand zu $\vec{J}^2$ und J_3. Was sind die Eigenwerte? Hinweis: Benutzen Sie (1) und (3).

iii) Verwenden Sie Gleichung (5) um zu zeigen, daß es ein m_{max} und ein m_{min} gibt mit $J_+\psi_{j,m_{\text{max}}} = 0$ und $J_-\psi_{j,m_{\text{min}}} = 0$. Verwenden Sie dann die Gleichungen (6), (7) um zu zeigen, daß $m_{\text{max}} = -m_{\text{min}} = j$. Begründen Sie, daß j ganz- oder halbzahlig sein muß. *2P*

Aufgabe 2: Drei-Schachtel-Paradoxon 4

Alice und Bob spielen ein quantenmechanisches Spiel. Hierzu werden drei Schachteln und ein Teilchen benötigt. Das Teilchen kann sich in jeder der drei Schachteln befinden. Der quantenmechanische Zustandsraum ist also dreidimensional und wird aufgespannt von orthonormierten Zuständen ψ_n, $n = 1, 2, 3$, wobei sich das Teilchen sicher in Schachtel Nr. n befindet, wenn das System im Zustand ψ_n ist. Alice präpariert das Quantensystem im Zustand $\psi = (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3)/\sqrt{3}$. Das Spiel geht so: Alice übergibt die Schachteln 1 und 2 an Bob. Dieser darf nach seiner Wahl in eine der beiden Schachteln hineinsehen. Falls er dabei *nicht* die Kugel findet, hat er gewonnen. Allerdings gibt es eine Zusatzregel: Bob notiert sein Ergebnis auf einem Zettel, ohne es Alice zu verraten. Alice darf dann entscheiden, ob das Spiel zählt oder nicht.

In der klassischen Physik würde Bob mit einer Wahrscheinlichkeit von $2/3$ gewinnen. Mit Hilfe der Quantenmechanik kann Alice versuchen, Bobs Chancen zu reduzieren: Sie beschließt, das Spiel nur dann zu werten, wenn der Zustand des Systems nicht orthogonal zu $\phi = (\psi_1 + \psi_2 - \psi_3)/\sqrt{3}$ ist.

Analysieren Sie die möglichen Spielverläufe und berechnen Sie Bobs Gewinnchance.

Aufgabe 3: Wasserstoffatom 3

Ein Wasserstoffatom befinde sich im Zustand

$$\psi = \frac{1}{6}\left(4\,\psi_{100} + 3\,\psi_{211} - \psi_{210} + \sqrt{10}\,\psi_{21,-1}\right) .$$

Berechnen Sie die Norm von ψ sowie die Erwartungswerte der Energie, des Drehimpulsquadrats und der z-Komponente des Drehimpulses. Hinweis: Verwenden Sie

$$H\,\psi_{nlm} = E_n\,\psi_{nlm} = \frac{1}{n^2}E_1\,\psi_{nlm}\,, \quad \vec{L}^2\,\psi_{nlm} = l(l+1)\hbar^2\,\psi_{nlm}\,,$$

$$L_3\,\psi_{nlm} = m\hbar\,\psi_{nlm}\,.$$