

Übungen zur Theoretischen Physik III (Theorie C, Elektrodynamik),

WS 2011/12

Blatt 0

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S. Thambyahpillai

Besprechung 19. 10. 11

Dieses Übungsblatt ist nur für die Praxis.

*

Aufgabe 1: δ -Distribution

i) Die Dirac'sche Delta-Funktion (genauer Distribution) kann dargestellt werden als

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} e^{-x^2/a^2}, \quad a > 0.$$

Beweisen Sie folgende Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0); \quad \delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x), \quad c \neq 0;$$

$$x\delta(x) = 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta'(x) f(x) = -f'(0).$$

Hinweis: verwenden Sie *nur* das Gauß'sche Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2/a^2} = \sqrt{\pi} a$$

sowie die Taylor-Entwicklung für $f(x)$ um $x = 0$.

ii) Die Darstellung $2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx}$ soll durch Auswertung von $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx - \epsilon k^2}$ und Rückführung auf die obige Darstellung der δ -Funktion abgeleitet werden.

iii) Berechnen sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^3 \delta(x^2 - 3x + 2)$$

Aufgabe 2: Fourier-Transformation

Gegeben sei die quadratintegrale Funktion $f(x)$. Die Fourier-Transformation ist definiert durch

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k), \quad \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} f(x).$$

i) Berechnen Sie die Fouriertransformierten von $xf(x)$ und $f'(x)$.

ii) Wie lautet die Fouriertransformierte der δ -Funktion?

Aufgabe 3: Vektoralgebra

Zeigen Sie daß

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = -\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) + \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}))$$

sowohl in Vektor- als auch in Indexnotation (in letzterer gilt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$, wobei ϵ_{ijk} der vollständig antisymmetrische Tensor ist und über zweimal vorkommende Indizes summiert wird).