

ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK III
(THEORIE C, ELECTRODYNAMIK), WS 2011/12

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

BLATT 1

Abgabe: 24. 10. 10
Besprechung: 26. 10. 10

Name:

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

- | | | | |
|--|--|---|---|
| ☐ Gruppe 1
Matthias Weinreuter | ☐ Gruppe 2
Juraj Streicher | ☐ Gruppe 3
Philip Wollfarth | ☐ Gruppe 4
Ulf Briskot |
| ☐ Gruppe 5
Valentin Bolsinger | ☐ Gruppe 6
Robin Roth | ☐ Gruppe 7
Julian Stöckel | ☐ Gruppe 8
Stefan Miereis |
| ☐ Gruppe 9
Philipp Rudo | ☐ Gruppe 10
Marius Bürkle | ☐ Gruppe 11
Guillaume Chalons | ☐ Gruppe 12
Justus Zorn |
| ☐ Gruppe 13
Yasmin Anstruther | | | |

*

Aufgabe 1: Nabla-Operator in kartesischen Koordinaten

3

i) Berechnen Sie (wobei $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$) 1P

$$\nabla r, \quad \nabla \cdot \vec{r}, \quad \nabla \times \vec{r}, \quad \nabla f(r), \quad \nabla \times \left(f(r) \frac{\vec{r}}{r} \right).$$

ii) Es seien $\vec{v}(\vec{r})$, $\vec{w}(\vec{r})$ stetig differenzierbare Vektorfelder. Zeigen Sie, daß in kartesischen Koordinaten gilt 2P

$$\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w}(\nabla \times \vec{v}) - \vec{v}(\nabla \times \vec{w})$$

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\nabla \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}$$

(bitte wenden)

Aufgabe 2: Nabla-Operator in Kugelkoordinaten**5**

- i) Leiten Sie die Form von ∇ und $\Delta = \nabla^2$ in Kugelkoordinaten her. Hierbei soll der Vektoroperator ∇ in der Orthonormalbasis $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ der Kugelkoordinaten ausgedrückt werden (beachten Sie daß die Ableitungen dieser Basisvektoren im Allgemeinen nicht verschwinden). 3P
- ii) Berechnen Sie $\nabla \cdot \vec{v}$ und $\nabla \times \vec{v}$ in Kugelkoordinaten. 2P

Aufgabe 3: Inkompressible Flüssigkeit**4**

Der Fluß einer inkompressiblen Flüssigkeit um einen Zylinder mit Radius R wird beschrieben durch das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ (wobei $\rho^2 := x^2 + y^2 > R^2$ gilt)

$$v_x = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right) + 2v_0 \frac{y^2 R^2}{\rho^4}, \quad v_y = -2v_0 \frac{xy R^2}{\rho^4}, \quad v_z = 0.$$

- i) Zeigen Sie, daß $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ gilt. Was bedeutet das physikalisch? 1P
- ii) Zeigen Sie, daß $\nabla \times \vec{v} = 0$ gilt. Was bedeutet das physikalisch? 1P
- iii) Aus ii) folgt daß $\vec{v} = \nabla\psi$, d.h. die durch $\vec{v}$ beschriebene Strömung ist eine sogenannte Potentialströmung. Versuchen Sie, ψ zu finden. (Hinweis: versuchen Sie, ψ aus einer Komponente der obigen Vektorgleichung zu bestimmen, z. B. aus $v_x = \partial_x \psi$; das so gefundene ψ muß die zweiten Gleichung $v_y = \partial_y \psi$ wegen der Integrabilitätsbedingung $\nabla \times \vec{v} = 0$ automatisch erfüllen, wenn allfällige Integrationskonstanten richtig gewählt werden.) 2P

Was muß für $\Delta\psi$ gelten?