Theoretische Physik C

Lösungen der Übungsblätter

KIT - Karlsruher Institut für Technologie

Wintersemester 2011/12

Mitschriebe ausgearbeitet von

Philipp Basler, Nils Braun, Larissa Bauer

21. April 2012

Inhaltsverzeichnis

Im folgenden Dokument wird aus Gründen der Bequemlichkeit häufig auf die Einsteinsche Summenkonvention zurückgegeriffen.

1. Übung

Übungen zur Theoretischen Physik III (Theorie C, Electrodynamik),
WS 2011/12 Blatt 0
Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S. Thambyahpillai Besprechung 19. 10. 11

Dieses Übungsblatt ist nur für die Praxis.
*

Aufgabe 1: δ–Distribution

i) Die Dirac'sche Delta-Funktion (genauer Distribution) kann dargestellt werden als

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{a\to 0} \frac{1}{a} e^{-x^2/a^2}\,, \quad a > 0.$$

Beweisen Sie folgende Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta(x) = 1\,; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta(x)f(x) = f(0)\,; \quad \delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x), c \neq 0\,;$$

$$x\delta(x) = 0\,; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta'(x)f(x) = -f'(0)\,.$$

Hinweis: verwenden Sie *nur* das Gauß'sche Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2/a^2} = \sqrt{\pi}a$$

sowie die Taylor-Entwicklung für $f(x)$ um $x = 0$.

ii) Die Darstellung $2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx}$ soll durch Auswertung von $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx-\epsilon k^2}$ und Rückführung auf die obige Darstellung der δ-Funktion abgeleitet werden.

iii) Berechnen sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^3 \delta(x^2 - 3x + 2)$$

Aufgabe 2: Fourier-Transformation

Gegeben sei die quadratintegrable Funktion $f(x)$. Die Fourier-Transformation ist definiert durch

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \widetilde{f}(k)\,, \quad \widetilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} f(x).$$

i) Berechnen Sie die Fouriertransformierten von $xf(x)$ und $f'(x)$.

ii) Wie lautet die Fouriertransformierte der δ-Funktion?

*7. Oktober 2011 17:59 Uhr

Aufgabe 3: Vektoralgebra

Zeigen Sie daß

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = -\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) + \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}))$$

sowohl in Vektor- als auch in Indexnotation (in letzterer gilt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$, wobei ϵ_{ijk} der vollständig antisymmetrische Tensor ist und über zweimal vorkommende Indizes summiert wird).

1. Aufgabe: $\delta-$Distribution

- (a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\frac{1}{a\sqrt{\pi}}e^{\frac{-x^2}{a^2}} = \lim\limits_{a\to 0}\frac{a\sqrt{\pi}}{a\sqrt{\pi}} = 1$

  (b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x)$ Soll sein:

$$f(x) = f(0)$$

$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x)[f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots] = f(0) + f'(0)\lim\limits_{a\to 0}\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dxxe^{-\frac{x^2}{a^2}}$

$$\frac{x}{a} \to x$$

$\frac{1}{2!}f''(0)\lim\limits_{a\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dxx^2e^{-\frac{x^2}{a}} = \frac{1}{2!}f''(0)\lim\limits_{a\to 0}\frac{a^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dxx^2e^{-x^2}$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x)f(x) = f(0)$$

  (c) $\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x), c \neq 0, a' = \frac{a}{|c|}$

  $\delta(cx) = \lim\limits_{a\to 0}\frac{1}{a\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2c^2}{a^2}} = \frac{1}{|c|}\lim\limits_{a'\to 0}\frac{1}{a'\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{a'^2}} = \frac{1}{|c|}\delta(x)$

  (d) $x\delta(x) = 0, g(x) = x\cdot f(x)$

  $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x)x\cdot f(x) = g(0) = 0$

  (e) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x), f(x) = -f(0)$

  $\delta'(x) = \lim\limits_{a\to 0}\frac{1}{a\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{a^2}}(-\frac{2x}{1^2})$

  $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\delta'(x)f(x) = -f(0)\lim\limits_{a\to 0}\frac{2}{a^2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dxxe^{\frac{x^2}{a^2}}$

  $-f(0)\lim\limits_{a\to 0}\frac{2}{a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dxx^2e^{-\frac{x^2}{a^2}} = -f'(0)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dxx^2e^{-x^2}$

  $\frac{d}{d\lambda}\int\limits_{d}^{x} e^{-x^2\lambda} = -\int x^2e^{-x^2\lambda} = -f'(0)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = -f'(0)$

  $\frac{d}{d\lambda}\sqrt{\lambda\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}}$

- $2\pi\delta(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dke^{-ikx}$

  $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx-\varepsilon k^2}$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx-\varepsilon x^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} e^{-\frac{-x^2}{4\varepsilon}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\varepsilon(k-\frac{ix}{2\varepsilon})^2}$
$z = k - \frac{ix}{2\varepsilon}$
$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} e^{-\frac{-x^2}{4\varepsilon}} \int\limits_{-\infty-\frac{ix}{2\varepsilon}}^{\infty-\frac{ix}{2\varepsilon}} dz e^{-\varepsilon z^2}$
$\int\limits_{-\infty-\frac{ix}{2\varepsilon}}^{\infty-\frac{ix}{2\varepsilon}} dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\varepsilon z^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}$
$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx-\varepsilon k^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{\pi}\frac{1}{2\varepsilon} e^{\frac{x^2}{2+\varepsilon^2}} = 2\pi\delta(x)$

- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx x^3 \delta(x^2-3x+2), \delta(f(x)) = \sum\limits_i \frac{1}{|f(x_i)|}\delta(x-x_i)$
  $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx x^3 \delta(x^2-3x+2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx x^3[\delta(x-2)+\delta(x-1)] = 8+1 = 9$

2. Aufgabe: Fourier-Transform

$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}\tilde{f}(k), \tilde{f}(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} x f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx i\frac{\partial}{\partial k} e^{ikx} f(x)) = i\frac{\partial}{\partial k}\tilde{f}(k)$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f''(x) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x} e^{-ikx} f(x) = i\tilde{f}(k)\cdot k$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\delta(x) = 1 = \tilde{\delta}(k)$

3. Aufgabe: Vektoralgebra

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$$

$$-(\vec{c}\times\vec{d})\times(\vec{a}\times\vec{b}) = -(\vec{c}\times\vec{d})\cdot\vec{b})\cdot\vec{a} + ((\vec{c}\times\vec{d})\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}$$

$((\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}))_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jmn}a_m b_n \varepsilon_{kop}c_o d_p = -\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{kop}a_m b_n c_o d_p = -(\delta_{in}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km})\varepsilon_{kop}a_m b_n c_o d_p = -a_i\cdot b_k\varepsilon_{kop}c_o d_p + b_i a_n \varepsilon_{kop}c_o d_p = -a_i(\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})) + b_j(\vec{a}(\vec{c}\times\vec{d}))$

2. Übung

ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK III
(THEORIE C, ELECTRODYNAMIK), WS 2011/12 BLATT 1

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 24. 10. 11
Besprechung: 26. 10. 11

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Matthias Weinreuter	☐ Gruppe 2 Juraj Streicher	☐ Gruppe 3 Philip Wollfarth	☐ Gruppe 4 Ulf Briskot
☐ Gruppe 5 Valentin Bolsinger	☐ Gruppe 6 Robin Roth	☐ Gruppe 7 Julian Stöckel	☐ Gruppe 8 Stefan Miereis
☐ Gruppe 9 Philipp Rudo	☐ Gruppe 10 Marius Bürkle	☐ Gruppe 11 Guillaume Chalons	☐ Gruppe 12 Justus Zorn
☐ Gruppe 13 Yasmin Anstruther			

*

Aufgabe 1: Nabla-Operator in kartesischen Koordinaten 3

i) Berechnen Sie (wobei $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$) *1P*

$$\nabla r\,, \quad \nabla \cdot \vec{r}\,, \quad \nabla \times \vec{r}\,, \quad \nabla f(r)\,, \quad \nabla \times (f(\vec{r})\frac{\vec{r}}{r}).$$

ii) Es seien $\vec{v}(\vec{r})$, $\vec{w}(\vec{r})$ stetig differenzierbare Vektorfelder. Zeigen Sie, daß in kartesischen Koordinaten gilt *2P*

$$\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w}(\nabla \times \vec{v}) - \vec{v}(\nabla \times \vec{w})$$

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\nabla \vec{w}) - \vec{w}(\nabla \vec{v}) + (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}$$

*18. Oktober 2011 18:25 Uhr

(bitte wenden)

Aufgabe 2: Nabla-Operator in Kugelkoordinaten 5

i) Leiten Sie die Form von ∇ und $\Delta = \nabla^2$ in Kugelkoordinaten her. Hierbei soll der Vektoroperator ∇ in der Orthonormalbasis $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$ der Kugelkoordinaten ausgedrückt werden (beachten Sie daß die Ableitungen dieser Basisvektoren im Allgemeinen nicht verschwinden). *3P*

ii) Berechnen Sie $\nabla \cdot \vec{v}$ und $\nabla \times \vec{v}$ in Kugelkoordinaten. *2P*

Aufgabe 3: Inkompressible Flüssigkeit 4

Der Fluß einer inkompressiblen Flüssigkeit um einen Zylinder mit Radius R wird beschrieben durch das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ (wobei $\rho^2 := x^2 + y^2 > R^2$ gilt)

$$v_x = v_0(1 - \frac{R^2}{\rho^2}) + 2v_0\frac{y^2R^2}{\rho^4}\,, \quad v_y = -2v_0\frac{xyR^2}{\rho^4}\,, \quad v_z = 0.$$

i) Zeigen Sie, daß $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ gilt. Was bedeutet das physikalisch? *1P*

ii) Zeigen Sie, daß $\nabla \times \vec{v} = 0$ gilt. Was bedeutet das physikalisch? *1P*

iii) Aus $ii)$ folgt daß $\vec{v} = \nabla\psi$, d.h. die durch $\vec{v}$ beschriebene Strömung ist eine sogenannte Potentialströmung. Versuchen Sie, ψ zu finden. (Hinweis: versuchen Sie, ψ aus einer Komponente der obigen Vektorgleichung zu bestimmen, z. B. aus $v_x = \partial_x\psi$; das so gefundene ψ muß die zweiten Gleichung $v_y = \partial_y\psi$ wegen der Integrabilitätsbedingung $\nabla \times \vec{v} = 0$ automatisch erfüllen, wenn allfällige Integrationskonstanten richtig gewählt werden.) *2P*

Was muß für $\Delta\psi$ gelten?

4. Aufgabe: Nabla-Operator in kartesischen Koordinaten

(i) •

$$\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{x}{r}$$
$$\implies \nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$$

•

$$\nabla \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

•

$$\nabla \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• Dies ist nur möglich, falls f stetig differenzierbar ist.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \\ \nabla f(r) &= \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \nabla r \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \left[\nabla \times \left(f(\vec{r})\frac{\vec{r}}{r}\right)\right]_i &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{f}{r}r_k\right) \\ &= \varepsilon_{ijk}\left[\frac{r_k}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial r_j}r - f\frac{r_j}{r}\right) + \delta_{jk}\frac{f}{r}\right] \\ \text{Erklärung}\delta_{jk} = 1 \iff j = k \implies \varepsilon_{ijk} &= \varepsilon_{ijj} = 0 \\ &= \varepsilon_{ijk}\left[\frac{\partial f}{\partial r_j}\frac{r_k}{r} - \frac{f}{r^3}r_j r_k\right] \\ &= \varepsilon_{ijk}\left[\frac{\partial f}{\partial r_j}\frac{r_k}{r}\right] - \frac{f}{r^3}(\vec{r}\times\vec{r})_i \\ &= \frac{1}{r}\left(\nabla f(\vec{r}) \times \vec{r}\right)_i \end{aligned}$$

(ii) Verwende

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

- $$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_j w_k}{\partial q_i} \\
&= \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial v_j}{\partial q_i} w_k + v_j \frac{\partial w_k}{\partial q_i} \right) \\
&= \varepsilon_{kij} \left(w_k \frac{\partial v_j}{\partial q_i} \right) - \varepsilon_{jik} \left(v_j \frac{\partial w_k}{\partial q_i} \right) \\
&= \vec{w}(\nabla \times \vec{v}) - \vec{v}(\nabla \times \vec{w})
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
(\nabla \times (\nabla \times \vec{w}))_i &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{klm} v_l w_m \\
&= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_j} w_m + v_l \frac{\partial w_m}{\partial x_j} \right) \\
&= (\delta_{il}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_j} w_m + v_l \frac{\partial w_m}{\partial x_j} \right) \\
&= \delta_{il}\delta_{jm} w_m \frac{\partial v_l}{\partial x_j} + \dots \\
&= \delta_{il} w_j \frac{\partial v_l}{\partial x_j} + \dots \\
&= w_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} - w_i \frac{\partial v_l}{\partial x_l} + v_i \frac{\partial w_m}{\partial x_m} - v_l \frac{\partial w_i}{\partial x_l} \\
&= (\vec{v}(\nabla \vec{w}) - \vec{w}(\nabla \vec{v}) + (\nabla \vec{w})\vec{v} - (\vec{v}\nabla)\vec{w})_i
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\nabla(\nabla \times \vec{v}) &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial q_i q_j} \\
&= -\varepsilon_{jik} \frac{\partial v_k}{\partial q_j q_i} \\
&= -\nabla(\nabla \times \vec{v}) \\
\implies \nabla(\nabla \times \vec{v}) &= 0
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(\nabla \times (\nabla \times \vec{v})) &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{klm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l} \\ &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l \partial x_j} \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\frac{\partial v_m}{\partial x_l \partial x_j} \\ &= \delta_{il}\delta_{jm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l \partial x_j} - \delta_{im}\delta_{jl}\frac{\partial v_m}{\partial x_l \partial x_j} \\ &= \frac{\partial v_m}{\partial x_m \partial x_i} - \frac{\partial^2 v_m}{\partial l^2} \\ &= \left(\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}\right)_i\end{aligned}$$

5. Aufgabe: Nabla-Operator in Kugelkoordinaten

Es gilt für eine Funktion $f(x,y,z)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = (\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \nabla f \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Weiterhin gilt aber auch für diese Funktion nach Substitution der kartesischen Koordinaten durch Kugelkoordinaten. Dann gilt auch

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \Theta}d\Theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi = (\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial \Theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}) \cdot \begin{pmatrix} dr \\ d\Theta \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

Mit der Jacobi-Matrix J als Funktionalmatrix gilt

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\Theta \\ d\varphi \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Wobei hier

$$J = (\vec{e}_r \vec{e}_\Theta \vec{e}_\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r\sin\Theta \end{pmatrix}$$

Mit dem totalen Differential in Kugelkoordinaten ergibt sich damit

$$df = (\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial \Theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}) \left(J^{-1}\right) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Durch Vergleich mit

$$df = \nabla f \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

ergibt sich in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
\nabla f &= (\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial \Theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}) \left(J^{-1}\right) \\
&= (\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial \Theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\Theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r^T \\ \vec{e}_\Theta^T \\ \vec{e}_\varphi^T \end{pmatrix} \\
&= \left(\vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\vec{e}_\Theta \frac{\partial f}{\partial \Theta} + \frac{1}{r\sin\Theta}\vec{e}_\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^T
\end{aligned}$$

Für die Divergenz eines Vektorfeldes $V = v_r\vec{e}_r + v_\Theta\vec{e}_\Theta + v_\varphi\vec{e}_\varphi$ gilt

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot V &= \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\vec{e}_\Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{1}{r\sin\Theta}\vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^T \cdot (v_r\vec{e}_r + v_\Theta\vec{e}_\Theta + v_\varphi\vec{e}_\varphi) \\
&= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}\underbrace{\vec{v}_\Theta \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \Theta}}_{=1} + \frac{v_r}{r\sin\Theta}\underbrace{\vec{e}_\varphi \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi}}_{=\sin\Theta} + \frac{v_\Theta}{r\sin\Theta}\underbrace{\vec{e}_\varphi \frac{\partial \vec{e}_\Theta}{\partial \varphi}}_{=\cos\Theta} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial v_\Theta \sin\Theta}{\partial \Theta} + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

Für den Laplace-Operator wird folgende Definition verwendet

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f)$$

Somit ergibt sich mit oben gezeigten und $v_r = \frac{\partial f}{\partial r}, v_\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \Theta}, v_\varphi = \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$.

$$\Delta f = \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\tan\Theta}\frac{\partial f}{\partial \Theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \Theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Für die Rotation gilt dann

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{v} &= (\frac{\partial}{\partial y}v_z - \frac{\partial}{\partial z}v_y)\vec{e}_x + \dots \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\Theta}\left(\frac{\partial \sin\Theta v_\varphi}{\partial \Theta} - \frac{\partial}{\partial \varphi}v_\Theta\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r v_\varphi}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r v_\Theta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \Theta}\right) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

6. Aufgabe: Inkompressible Flüssigkeit

Gegeben ist der Vektor

$$\vec{v} = v_0 \begin{pmatrix} 1 - \frac{R^2}{\rho^2} + 2\frac{y^2R^2}{\rho^4} \\ -2\frac{xyR^2}{\rho^4} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rho^2 = x^2 + y^2$$

(i)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= v_0\left(2R^2\frac{x}{\rho^4} - 8y^2R^2\frac{x}{\rho^4}\right) - 2v_0 x R^2 \frac{\rho^4 - 4\rho y^2}{\rho^8} \\ &= 0\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $\vec{v}$ ein Quellenfreies Vektorfeld ist.

(ii)

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \vec{v} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 6\,\frac{v_0\,R^2 y}{(x^2+y^2)^2} - 8\,\frac{v_0\,y^3 R^2}{(x^2+y^2)^3} - \left(-2\,\frac{v_0\,R^2 y}{(x^2+y^2)^2} + 8\,\frac{v_0\,x^2 y R^2}{(x^2+y^2)^3}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8\frac{v_0 R^2 y}{(x^2+y^2)^2} - 8\frac{v_0 y R^2 (x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich, dass $\vec{v}$ wirbelfrei ist. Desweiteren zeigt es, dass es eine Funktion ψ gibt mit

$$\nabla\psi = \vec{v}$$

(iii) Es sei ψ mit $\vec{v} = \nabla\psi$. Damit gilt auch

$$
\begin{aligned}
\psi(x, y, z) &= \int v_y dy + k(x, z) \\
&= \int -2v_0 \frac{xyR^2}{(x^2+y^2)^2} dy + k(x, z) \\
&= v_0 x R^2 \cdot \frac{1}{x^2+y^2} + k(x, z)
\end{aligned}
$$

Weiterhin muss gelten

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial x} &\stackrel{!}{=} v_x \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= v_0 R^2 \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \\
&= 2 v_0 R^2 \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} - v_0 R^2 \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \\
\implies \frac{\partial k}{\partial x} &= v_0 \\
k(x,z) &= v_0 x + q(z) \\
\frac{\partial \psi}{\partial z} &\stackrel{!}{=} v_z \\
\frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial q}{\partial z} \\
\implies \frac{\partial q}{\partial z} &\stackrel{!}{=} 0 \\
q(z) &= C
\end{aligned}
$$

Also ergibt sich insgesamt

$$\psi(x,y,z) = v_0 R^2 \frac{x}{x^2+y^2} + v_0 x + C$$

Es gilt

$$\Delta \psi = \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

3. Übung

ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK III
(THEORIE C, ELECTRODYNAMIK), WS 2011/12 BLATT 2

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 31. 10. 11
Besprechung: 02. 11. 11

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Matthias Weinreuter	☐ Gruppe 2 Juraj Streicher	☐ Gruppe 3 Philip Wollfarth	☐ Gruppe 4 Ulf Briskot
☐ Gruppe 5 Valentin Bolsinger	☐ Gruppe 6 Robin Roth	☐ Gruppe 7 Julian Stöckel	☐ Gruppe 8 Stefan Miereis
☐ Gruppe 9 Philipp Rudo	☐ Gruppe 10 Marius Bürkle	☐ Gruppe 11 Guillaume Chalons	☐ Gruppe 12 Justus Zorn
☐ Gruppe 13 Yasmin Anstruther			

*

Aufgabe 1: Vektorfelder, Satz von Gauß 5

Gegeben sind die Vektorfelder (R ist konstant und $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$\vec{A} = \frac{1}{R^2 + \rho^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{B} = \frac{1}{R^2 + \rho^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} .$$

i) Berechnen Sie Divergenz und Rotation beider Vektorfelder. *1P*

ii) Gegeben sei ein Würfel mit Mittelpunkt in (0,0,0) und Kantenlänge 2 (die Kanten sind parallel zu den Koordinatenachsen gelegen). Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int \vec{A} \cdot d\vec{f}$ entlang der Würfeloberfläche. Hätten Sie das Resultat mithilfe des Gaußschen Satzes vorhersagen können? *1P*

iii) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int \vec{B} \cdot d\vec{f}$ entlang derselben Würfeloberfläche wie in $ii)$. Überprüfen Sie das Resultat mithilfe des Gaußschen Satzes. Hinweis: *3P*

*21. Oktober 2011 16:55 Uhr

(bitte wenden)

Die zweite Integration (unter Benützung des Gaußschen Satzes) ist einfacher in ebenen Polarkoordinaten ($(x, y) \rightarrow (r, \phi)$).

Benötigte Integrale:

$$\int_0^1 \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{1}{a},$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{d\phi}{a^2 + \tan^2(\phi)} = \frac{a\pi - 4 \arctan \frac{1}{a}}{4a(a^2 - 1)}.$$

Aufgabe 2: Satz von Gauß und Stokes	2

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} xy \\ 2yz \\ 3xz \end{pmatrix}.$$

i) Überprüfen Sie den Satz von Gauß für den Würfel mit den Eckpunkten (0,0,0), (2,0,0), (0,2,0), (2,2,0), (0,0,2), (2,0,2), (0,2,2), (2,2,2). *1P*

ii) Überprüfen Sie den Satz von Stokes für das Dreieck mit den Eckpunkten (0,0,0), (0,2,0), (0,0,2). *1P*

Aufgabe 3: Linien- und Oberflächenintegral	5

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v} = \frac{\vec{r}}{r}$ (wobei wieder $\vec{r} = (x, y, z)$ und $r = |\vec{r}|$).

i) Berechnen Sie das Linienintegral $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$ entlang einer beliebigen Kurve C zwischen den Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$. *1P*

ii) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_{S_0} \vec{v} \cdot d\vec{f}$ über eine Kugeloberfläche S_0 mit Radius R, wobei der Kugelmittelpunkt im Ursprung $(0, 0, 0)$ gelegen ist. *2P*

iii) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_{S_b} \vec{v} \cdot d\vec{f}$ über eine Kugeloberfläche S_b mit Radius R, wobei der Kugelmittelpunkt im Punkt $(0, 0, b)$ gelegen ist. Nehmen Sie $R > b$ an. (Hinweis: Das etwas unschön gelegene Integrationsgebiet lässt sich durch einen einfachen ersten Schritt leicht in ein schöner gelegenes überführen.) *2P*

7. Aufgabe: Vektorfelder, Satz von Gauß

Die Vektorfelder sind

$$\mathbf{A} = \frac{1}{R^2+\rho^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{R^2+\rho^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Die Divergenz der beiden Vektorfelder ist

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{-2xy}{(R^2+\rho^2)^2} + \frac{2yx}{(R^2+\rho^2)^2} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{B} = \frac{R^2+x^2+y^2-2x^2+R^2+x^2+y^2-2y^2}{(R^2+\rho^2)^2} = \frac{2R^2}{(R^2+\rho^2)^2}$$

Die Rotation ist

$$\text{rot } \mathbf{A} = -\frac{1}{(R^2+\rho^2)^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2R^2+2x^2+2y^2-2x^2-2y^2 \end{pmatrix} = \frac{2R^2}{(R^2+\rho^2)^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{(R^2+\rho^2)^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2xy-2yx \end{pmatrix} = 0$$

(b) Betrachtet man einen Würfel, so hat dieser 6 verschiedene Seiten.

Das Oberflächenintegral kann also in 6 einzelne Flächenintegrale zerlegt werden. Die $\pm$ bzw. $\mp$ kommen gerade von der unterschiedlichen Orientierung der Normalen auf der Fläche.- Für x, y oder $z = 1$ zeigt die Normale in positive Richtung, für x, y oder $z = -1$ in negative.

Für eine Seite F_Z senkrecht zur z-Richtung gilt:

$$\int\limits_{F_Z} \mathbf{A} \, \mathbf{df} = \pm \int\int \mathbf{A} \cdot \hat{e}_z \text{ dx dy} = 0$$

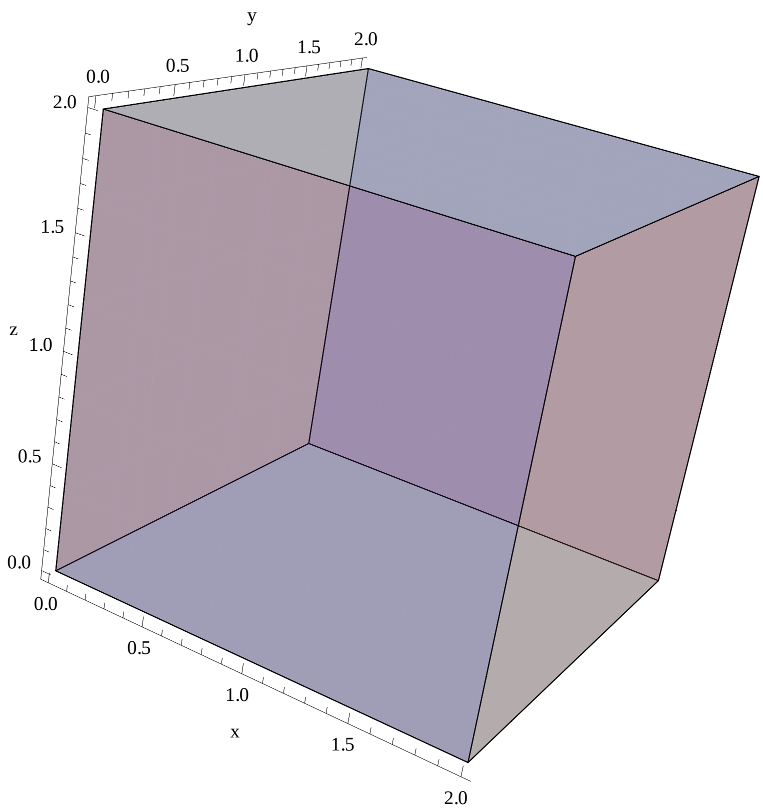


Abbildung 1: Würfel zur Berechnung der Oberflächenintegrale

Für eine Seite F_X senkrecht zur x-Achse ist dies (jeweils für $x = -1$ oder $x = 1$)

$$\int\limits_{F_X} \mathbf{A}\ \mathbf{df} = \pm \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \mathbf{A}\cdot\hat{e}_x \text{ dy dz} = \pm \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{y}{R^2+\rho^2} \text{ dy dz} = \pm\frac{2}{2}\ln\left(\frac{R^2+(\pm1)^2+1^2}{R^2+(\pm1)^2+(-1)^2}\right) = 0$$

Analog kommt man auch (mit vertauschtem Vorzeichen und wieder einmal für $y = -1$ und $y = 1$):

$$\int\limits_{F_X} \mathbf{A}\ \mathbf{df} = 0$$

Somit ist das Gesamtoberflächenintegral gerade 0.

Mit dem Satz von Gauß erhält man sofort (wenn F die Oberfläche des Würfels mit Volumen V ist):

$$\int\limits_{F} \mathbf{A}\ \mathbf{df} = \int\limits_{F} \mathbf{A}\cdot\hat{n}\text{ df} = \int\limits_{V} \text{div } \mathbf{A}\text{ dV} = 0$$

(c) Hier erhält man ebenso, dass das Integral der Flächen senkrecht zur z-Achse 0 ergeben. Für die Integrale der Flächen F_X senkrecht zur x-Achse gilt jetzt

$$\int\limits_{F_X} \mathbf{B}\ \mathbf{f} = \pm \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{R^2+x^2+y^2}\ \mathrm{dy}\ \mathrm{dz} = \pm 2 \int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{R^2+x^2+y^2}\ \mathrm{dy}$$

Nun wenden wir die Formel vom Blatt mit $a^2 = R^2 + x^2$ an und erhalten

$$= \pm 4x \int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{dy}}{(R^2+x^2)+y^2} = \pm \frac{4x}{\sqrt{R^2+x^2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right) = \pm \frac{4x}{\sqrt{R^2+1}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+1}}\right)$$

und analog

$$\int\limits_{F_Y} \mathbf{B}\ \mathbf{f} = \pm \frac{4y}{\sqrt{R^2+y^2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+y^2}}\right) = \pm \frac{4y}{\sqrt{R^2+1}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+1}}\right)$$

Für $x = y = 1$ oder $x = y = -1$ sind die Ausdrücke gleich (weil sich zwar durch die anderen Normalenrichtung das Vorzeichen umdreht, aber durch das andere Vorzeichen von x bzw. y wieder umgekehrt wird). Somit ist die Summe der Oberflächenintegrale gegeben durch

$$\int\limits_{F} \mathbf{B}\ \mathbf{df} = 4 \int\limits_{F_X} \mathbf{B}\ \mathbf{df}|_{x=1} = \frac{16}{\sqrt{R^2+1}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+1}}\right)$$

Auch hier können wir den Satz von Gauß anwenden und müssen das Integral

$$\int\limits_{F} \mathbf{B}\ \mathbf{df} = \int\limits_{V} \mathrm{div}\ \mathbf{B}\ \mathrm{dV} = \int\limits_{V} \frac{2R^2}{(R^2+\rho^2)^2}\ \mathrm{dV}$$

lösen. Dafür gehen wir in Zylinderkoordinaten über. Die z-Komponente bleibt dabei gleich. Da die Divergenz rotationssymetrisch um die z-Achse ist, können wir auch nur über einen Teil der Würfelgrundfläche in der $x-y$-Ebene integrieren und dann entsprechend mit dem richtigen Faktor multiplizieren. Wir wählen das Dreieck $(0,0,0)-(1,0,0)-(0,1,0) = F$ uns müssen dann mit dem Faktor 8 multiplizieren. Das Dreieck ist beschrieben durch $0 \leq \phi \leq \pi/4$ und $0 \leq r \leq 1/\cos(\phi)$. Insgesamt ist also das

Integral

$$\int_F \mathbf{B}\ \mathbf{df} = 8 \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0}^{\frac{1}{\cos(\phi)}} \frac{2R^2 r}{(R^2+r^2)^2}\ \mathrm{dr}\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{dz}$$

zu berechnen. Das innerste und äußerste Integral sind noch relativ einfach. Das z-Integral führt zum Faktor 2. Und glücklicherweise ist $2r$ gerade die Ableitung der Klammer im Nenner.

$$= -16R^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left. \frac{R^2}{R^2+r^2} \right|_{r=0}^{r=1/\cos(\phi)} \mathrm{d}\phi = -16R^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{R^2+1/\cos^2(\phi)} - \frac{1}{R^2}\ \mathrm{d}\phi$$

Um wieder die Formel auf dem Blatt verwenden zu können, benutzen wir die Transformationsformel

$$\frac{1}{\cos^2(\phi)} - 1 = \tan^2(\phi)$$

und berechnen das Integral über den hinteren Summanden.

$$= -16R^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{R^2+1+\tan^2(\phi)}\ \mathrm{d}\phi - \frac{\pi}{4R^2} \right]$$

Jetzt wenden wir die Formel an

$$= -16R^2 \left[\frac{\pi\sqrt{R^2+1} - 4\arctan(\frac{1}{\sqrt{R^2+1}})}{4R^2\sqrt{R^2+1}} - \frac{\pi}{4R^2} \right] = \frac{16}{\sqrt{R^2+1}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+1}}\right)$$

und erhalten das selbe Ergebnis wie vorher.

8. Aufgabe: Satz von Gauß und Stokes

(a) Zuerst soll das Integral als normales Oberflächenintegral über F bestimmt werden. Dies ist also

$$\int_F \mathbf{v}\ \mathbf{df} = \int_0^2\int_0^2 v_z\ \mathrm{dx}\ \mathrm{dy} + \int_0^2\int_0^2 v_x\ \mathrm{dy}\ \mathrm{dz} + \int_0^2\int_0^2 v_y\ \mathrm{dx}\ \mathrm{dz}$$

jeweils nur für die Seite mit x, y oder $z = 2$, da für x, y oder $z = 0$ das Integral wegfällt.

$$= \int_0^2\int_0^2 3xz \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} + \int_0^2\int_0^2 xy \,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} + \int_0^2\int_0^2 2yz \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dz} = \frac{3}{2}x^2yz + \frac{1}{2}xy^2z + xyz^2\Big|_{x,y,z=0}^{x,y,z=2} = 48$$

Berechnet man die Divergenz, so erhält man

$$\mathrm{div}\ \mathbf{v} = y + 2z + 3x$$

Damit ist nach dem Satz von Gauß das Integral auch

$$\int_F \mathbf{v}\ \mathbf{df} = \int_V y + 2z + 3x \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \frac{3}{2}x^2yz + \frac{1}{2}xy^2z + xyz^2\Big|_{x,y,z=0}^{x,y,z=2} = 48$$

(b) Zuerst wollen wir das Linienintegral berechnen. Wir durchlaufen im mathematisch positiven Sinne das Dreieck mit $(0,0,0) \to (0,2,0) \to (0,0,2)$. Der erste und letze Weg wird jeweils parametrisiert durch

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2-2t \end{pmatrix} \qquad t = 0\ldots 1$$

Setzt man dies aber in $\mathbf{v}$ ein, so erhält man in beiden Fällen 0. Interessant ist also nur der zweite Weg mit

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-2t \\ 2t \end{pmatrix} \qquad \gamma_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad t = 0\ldots 1$$

Setzen wir ein und integrieren

$$\int_C \mathbf{v}\ \mathbf{d}\gamma = \int_0^1 \mathbf{v}(\gamma_2)\gamma_2' \,\mathrm{dt} = 16\int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t-t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{dt} = -16\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) = \frac{16}{3} - 8 = -\frac{8}{3}$$

Diesmal benötigen wir zum Vergleich den Satz von Stokes und erhalten

$$\int\limits_C \mathbf{v}\ \mathbf{d}\gamma = \int\limits_F \text{rot } \mathbf{v}\ \mathbf{df} = \int\limits_F (\text{rot } \mathbf{v})_x \ \text{df}$$

da das Dreieck senkrecht zur x-Achse steht. Die x-Komponente der Rotation ist

$$(\text{rot } \mathbf{v})_x = -2y$$

und das Integral ist dann

$$\int\limits_F (\text{rot } \mathbf{v})_x \ \text{df} = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{2-z} -2y \ \text{dy dz} = \int\limits_0^2 -(2-z)^2 \ \text{dz} = -\frac{8}{3}$$

9. Aufgabe: Linien- und Oberflächenintegral

(a) Wie schon auf dem letzten Übungsblatt berechnet, gilt

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{v}$$

Somit ist $\mathbf{v}$ ein Gradientenfeld und das Linienintegral lässt sich sehr einfach darstellen mit

$$\int\limits_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{df} = r|_{\mathbf{r}=\mathbf{r_1}}^{\mathbf{r}=\mathbf{r_2}} = r_2 - r_1$$

also gerade die Differenz der Beträge.

(b) Wir benutzen Kugelkoordinaten (mit der Funktionaldeterminante $r^2 \sin(\theta)$ und als Normalenvektor

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Das Integral lautet dann

$$\int\limits_{S_0} \mathbf{v} \cdot \mathbf{df} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_0^{\pi} \underbrace{\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^2}}_{=1} r^2 \sin\theta \ \text{d}\theta\text{d}\phi = 2\pi r^2 \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \ \text{d}\theta = 4\pi r^2$$

(c) Transformiere

$$z \to z - b$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-b \end{pmatrix}$$

Nun

$$\begin{aligned} \vec{v}d\vec{f} &= \frac{1}{\sqrt{R^2+b^2-2bz}} \left(xdydz + ydzdx + (z-b)dxdy\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{R^2+b^2-2bR\cos\Theta}} \left(R^3\sin\Theta - bR^2\sin\Theta\cos\Theta\right) d\Theta d\varphi \end{aligned}$$

Damit

$$\int \vec{v}d\vec{f} = 2\pi R^3 \int\limits_0^\pi \frac{\sin\Theta}{\sqrt{R^2+b^2-2bR\cos\Theta}} d\Theta - 2\pi bR^2 \int\limits_0^\pi \frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{R^2+b^2-2bR\cos\Theta}} d\Theta$$

$$t = \cos\Theta$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\Theta} - \sin\Theta$$

$$\int \vec{v}d\vec{f} = 2\pi R^3 \int\limits_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{R^2+b^2-2Rbt}} - 2\pi R^2 b \int\limits_{-1}^1 \int\limits_{-1}^1 \frac{tdt}{\sqrt{R^2+b^2-2Rbt}}$$

$$a = \frac{R^2+b^2}{2Rb}$$

$$\int \vec{v}d\vec{f} = 2\pi \frac{R^3}{\sqrt{2RB}} \int\limits_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{a-t}} - \frac{2\pi R^2 b}{\sqrt{2Rb}} \int\limits_{-1}^1 \frac{tdt}{\sqrt{a-t}}$$

$$\int dt \frac{1}{\sqrt{a-t}} = -2\sqrt{a-t}$$

$$\int dt \frac{t}{\sqrt{a-t}} = -\frac{2}{3}(t+2a)\sqrt{a-t}$$

Insgesamt

$$
\begin{aligned}
\int \vec{v} d\vec{f} &= \frac{4\pi R^3}{\sqrt{2Rb}} \left(\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}\right) - \frac{4\pi R^3 b}{3\sqrt{2Rb}} \left((2a-1)\sqrt{a+1} - (2a+1)\sqrt{a-1}\right) \\
&= \frac{4\pi R^3}{2Rb} \left(R + b - |R-b|\right) - \frac{4\pi b R^3}{6R^2b^2} \left[(R^2 + b^2 - Rb)(Rb + b) - (R^2 + b^2 + Rb)(R - b)\right] \\
&= 4\pi R^2 - \frac{4\pi}{3} b^2
\end{aligned}
$$

4. Übung

ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK III
(THEORIE C, ELECTRODYNAMIK), WS 2011/12 — BLATT 3

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 07. 11. 11
Besprechung: 09. 11. 11

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Matthias Weinreuter	☐ Gruppe 2 Juraj Streicher	☐ Gruppe 3 Philip Wollfarth	☐ Gruppe 4 Ulf Briskot
☐ Gruppe 5 Valentin Bolsinger	☐ Gruppe 6 Robin Roth	☐ Gruppe 7 Julian Stöckel	☐ Gruppe 8 Stefan Miereis
☐ Gruppe 9 Philipp Rudo	☐ Gruppe 10 Marius Bürkle	☐ Gruppe 11 Guillaume Chalons	☐ Gruppe 12 Justus Zorn
☐ Gruppe 13 Yasmin Anstruther			

*

Aufgabe 1: Laplace-Gleichung — 4

Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ mit der Zusatzforderung

i) $\Phi(\vec{x}) = \Phi(r)\,, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,$ — *2P*

ii) $\Phi(\vec{x}) = \Phi(\rho)\,, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}\,,$ — *1P*

iii) $\Phi(\vec{x}) = \Phi(x)\,.$ — *1P*

Geben Sie in jedem Fall eine Lösung an, die in $\vec{x} = 0$ regulär ist und, soweit möglich, eine Lösung, die im Unendlichen verschwindet (die triviale Lösung $\Phi \equiv 0$ gilt nicht).

Aufgabe 2: Sphärische Raumladung — 3

Der Raum zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen mit Radien R_1 und R_2 ($R_1 < R_2$) sei mit Ladung gefüllt. Für die Ladungsdichte gelte $\rho = \alpha/r^2$.

*21. Oktober 2011 17:06 Uhr

(bitte wenden)

i) Berechnen Sie die Gesamtladung. *1P*

ii) Berechnen Sie das Potential und die Feldstärke mithilfe der Poissonschen Gleichung. *2P*

Aufgabe 3: Wasserstoffatom 3

Das Wasserstoffatom im Grundzustand wird durch folgende Ladungsdichte beschrieben: die Kernladung ist punktförmig im Ursprung konzentriert,

$$\rho_{\mathrm{k}} = \frac{e}{4\pi r^2}\delta(r)\,,$$

und die mittlere Elektronenladungsdichte ist durch

$$\rho_{\mathrm{e}} = -\frac{e}{\pi a^3}\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a}}\,,$$

gegeben, wobei a der Bohr'sche Radius ist.

i) Berechnen Sie unter Verwendung des Gaußschen Satzes die elektrische Feldstärke und das Potential der Ladungsverteilung $\rho = \rho_{\mathrm{k}} + \rho_{\mathrm{e}}$. *2P*

ii) Diskutieren Sie die Grenzfälle $r \ll a$ und $r \gg a$. *1P*

Aufgabe 4: Flächenladung 2

Eine unendlich ausgedehnte Ebene sei mit der homogenen Flächenladung (Ladung pro Flächeneinheit) $\rho_{\mathrm{F}} = \mathrm{const}$ belegt. Berechnen Sie die Feldstärke und das Potential.

10. Aufgabe: Laplace-Gleichung

In all diesen Aufgaben ist die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0$$

zu lösen. Außerdem sollen die einzelnen Lösungen in $\mathbf{x} = 0$ regulär sein und wenn möglichst für $\mathbf{x} \to \infty$ verschwinden.

(1) Setze $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und wechsle in Kugelkoordinaten. Wie auf Übungsblatt 1 berechnet, lautet der Laplace-Operator dann

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)$$

da die Zusatzbedingung auf dem Übungsblatt Φ nur noch von r abhängig macht. Somit gibt es auch keinen Unterschied zwischen totaler und partieller Ableitung mehr. Damit dieser Term jetzt 0 wird muss (für $r \neq 0$) die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

gelöst werden. Durch einmalige Integration kommt man auf

$$r^2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = C_1 \qquad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = \frac{C_1}{r^2}$$

wobei C_1 eine Konstante ist. Wieder integrieren liefert

$$\Phi = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Nun ist diese Lösung aber für $\mathbf{x} = 0$ nicht regulär. In diesem Fall müsste $C_1 = 0$ gelten, damit Φ regulär wird. Mit der Bedingung $\Phi = 0$ für $\mathbf{x} \to \infty$ erhält man aber $C_2 = 0$ und damit die triviale Lösung.

(2) Analog zur (1) bezeichnen wir mit ρ den Radius

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und wechseln jetzt in Zylinderkorrdinaten. Dort lautet der Laplace-Operator (da Φ

nur von ρ abhängig ist):

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)$$

Wieder können wir die totalen Ableitungen benutzen und für $\rho \neq 0$ integrieren (analog zur (1)):

$$\Delta\Phi = 0 \implies \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\rho} = \frac{C_1}{\rho}$$

C_1 ist wieder eine Konstante. Weiteres Integrieren liefert

$$\Phi = C_1 \ln\rho + C_2$$

Für $\mathbf{x} \to 0$ geht dieser Ausdruck ebenfalls nur für $C_1 = 0$ nicht gegen Unendlich. Dann müsste aber auch wieder die Konstante $C_2 = 0$ sein und wir hätten wieder die triviale Lösung.

(3) Diesmal benötigen wir nur den Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten, jedoch ohne die Teile für y und z:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

Damit die Laplace-Gleichung erfüllt ist, muss also für Φ gelten:

$$\Phi = \int\int 0 \ \mathrm{dx} = C_1 x + C_2$$

mit zwei Konstanten C_1, C_2, da wieder partieller mit totaler Ableitung vertauschbar ist. Damit die Lösung für $\mathbf{x} \to \infty$ gegen 0 geht, müssten jedoch $C_1 = C_2 = 0$ gelten, was nur die triviale Lösung möglich machen würde.

11. Aufgabe: Sphärische Raumladung

(1) Die Gesamtladung Q ergibt sich als

$$Q = \int_V \mathrm{dq}$$

wenn V das Volumen des Körpers ist. Mit der Beziehung über die Ladungsdichte

$$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} = \frac{\alpha}{r^2}$$

und die Transformation in Kugelkoordinaten erhält man

$$Q = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{R_1}^{R_2} \alpha \sin\theta \text{ dr d}\theta \text{ d}\phi$$

da sich das r^2 im Zähler und das in der Funktionsdeterminante gerade wegkürzen. Die Lösung dieses recht einfachen Integrals ist

$$Q = 4\pi\alpha(R_2 - R_1)$$

(2) Da die Ladungsverteilung eigentlich nur für den Bereich $R_1 < r < R_2$ definiert ist, schreiben wir

$$\rho = \frac{\alpha}{r^2}\Theta(R_2 - r)\Theta(r - R_1)$$

Nun müssen wir die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho = -4\pi\frac{\alpha}{r^2}\Theta(R_2 - r)\Theta(r - R_1)$$

lösen. Offensichtlich hat das **E**-Feld (aus Symmetriegründen!) nur eine r-Komponente. Also ist Φ nur von r abhängig. Wir wechseln wieder in Kugelkoordinaten und erhalten

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial d}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = -4\pi\frac{\alpha}{r^2}\Theta(R_2 - r)\Theta(r - R_1)$$

Nach Multiplikation mit r^2 müssen wir dies jetzt integrieren (von 0 bis r) und erhalten

$$r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \int_0^r -4\pi\alpha\Theta(R_2 - r')\Theta(r' - R_1)\text{ dr}' = \begin{cases} 0 \text{ für } r < R_1 \\ -4\pi\alpha(r - R_1) \text{ für } R_1 < r < R_2 \\ -4\pi\alpha(R_2 - R_1) \text{ für } R_2 < r \end{cases}$$

Rechenweg:

$$\int_0^r -4\pi\alpha\Theta(R_2 - r')\Theta(r' - R_1)\text{ dr}' = -4\pi\alpha\, r'|_{r'=0}^{r'=r}$$

$r < R_1$: Die beiden Heavisidschen Thetafunktionen liefern beide 0 für das ganze Integrationsgebiet (da $r < R_1$). Somit ist auch das Integral 0.

$R_1 < r < R_2$: Die untere Grenze wird durch die Θ-Funktion von 0 auf R_1 gesetzt. Die obere Grenze bleibt bei r. Deshalb müssen r und R_1 eingesetzt werden.

$R_2 < r$: Die beiden Heavisidschen Funktionen sind nur für den Bereich $r \in [R_1, R_2]$ Eins. Deshalb muss nur dieser Bereich ausgewertertet werden.

Jetzt dividieren wir durch r^2 und integrieren wieder nach r:

$$\Phi = \begin{cases} C_1 & \text{für } r < R_1 \\ -4\pi\alpha(\ln r + \frac{R_1}{r}) + C_2 & \text{für } R_1 < r < R_2 \\ 4\pi\alpha(R_2 - R_1)\frac{1}{r} + C_3 & \text{für } R_2 < r \end{cases}$$

Rechenweg:

$r < R_1$: Dieser Fall ist trivial. Das Integral über Null ist eine Konstante.

$R_1 < r < R_2$: Geteilt durch r^2 steht einmal der Summand $1/r$ (integriert $\ln r$) und einmal $1/r^2$ (integriert $-1/r$).

$R_2 < r$: Hier gibt es nur einmal $1/r^2$, was integriert $-1/r$ ergibt.

Damit das Potential im Unendlichen verschwindet, setzen wir $C_3 = 0$. Die restlichen Konstanten erhalten wir über die Stetigkeitsbedingung an den Randflächen. Es gilt

$$\Phi(R_2) = 4\pi\alpha\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) = -4\pi\alpha\left(\ln R_2 + \frac{R_1}{R_2}\right) + C_2 \implies C_2 = 4\pi\alpha\left(1 + \ln R_2\right)$$

Somit erhält man für den mittleren r-Bereich $R_1 < r < R_2$:

$$\Phi(r) = 4\pi\alpha\left(\ln\left(\frac{R_2}{r}\right) - \frac{R_1}{r} + 1\right)$$

Damit auch die anderen Randfläche bei R_1 stetig ist, muss gelten

$$C_1 = \Phi(R_1) = 4\pi\alpha\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

und man erhält insgesamt

$$\Phi(r) = \begin{cases} 4\pi\alpha\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) & \text{für } r < R_1 \\ 4\pi\alpha\left(\ln\left(\frac{R_2}{r}\right) - \frac{R_1}{r} + 1\right) & \text{für } R_1 < r < R_2 \\ 4\pi\alpha(R_2 - R_1)\frac{1}{r} & \text{für } R_2 < r \end{cases}$$

Das **E**-Feld besitzt nur eine r-Komponente. Diese erhält man durch einfaches Ableiten (und Minus setzen):

$$E_r = \begin{cases} 0 & \text{für } r < R_1 \\ 4\pi\alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{R_1}{r^2}\right) & \text{für } R_1 < r < R_2 \\ \frac{4\pi\alpha}{r^2}(R_2 - R_1) & \text{für } R_2 < r \end{cases}$$

12. Aufgabe: Wasserstoffatom

(1) Wir benutzen den Gaußschen Satz

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot n \text{ dA} = 4\pi \int_V \rho \text{ dV}$$

Aus Symmetriegründen wirkt das **E**-Feld nur in r-Richtung, weshalb es reicht, nur die r-Komponente zu betrachten. Also gilt

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot n \text{ dA} = E_r \cdot 4\pi r^2$$

Auf der anderen Seite steht (mit dem Integral über Kugelkoordinaten)

$$\int_V \rho \text{ dV} = \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \int_0^r \rho_k + \rho_E r'^2 \sin\theta \text{ dr}' \text{ d}\theta \text{ d}\phi = 4\pi \int_0^r \frac{e\delta(r')}{4\pi} - \frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a} r^2 \text{ dr}$$

Der erste Summand liefert aufgrund der Deltafunktion einfach nur e. Beim zweiten Summanden wenden wir zweimalige partielle Integration an:

$$\int_0^r r'^2 e^{-2r'/a} \text{ dr}' = a \int_0^r r' e^{-2r'/a} \text{ dr}' - \frac{1}{2} a r^2 e^{-2r/a}$$

$$= -\frac{1}{2} a^2 r e^{-2r/a} + \frac{a^2}{2} \int_0^r e^{-2r'/a} \text{ dr}' - \frac{1}{2} a r^2 e^{-2r/a} = \frac{1}{4} a \left(a^2 - e^{-\frac{2r}{a}} \left(a^2 + 2ar + 2r^2\right)\right)$$

Insgesamt erhält man

$$\int_V \rho \text{ dV} = e - e + \frac{e}{a^2} \cdot e^{-2r/a} \left(a^2 + 2ar + 2r^2\right) = e \cdot e^{-2r/a} \left(1 + 2\frac{r}{a} + 2\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)$$

Für das E_r-Feld ist dies dann insgesamt (die 4π fallen weg und man muss nur noch durch r^2 teilen)

$$E_r = e \cdot e^{-2r/a} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{ra} + \frac{2}{a^2} \right) = \frac{2e}{a^2} e^{-2r/a} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{a}{r} + 1 \right)$$

Um jetzt das Potential zu berechnen, benutzen wir die Formel

$$\Phi(r) = - \int E_r \; \mathrm{dr}$$

da $\mathbf{E}$ der Gradient von $-\Phi$ ist und der Gradient in Kugelkoordinaten bei fehlender Abhängigkeit von ϕ und θ ganz einfach $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{e}_r$ lautet. Insgesamt haben wir also

$$\Phi = \frac{e}{a} \frac{e^{-2r/a}}{r} (a + r) = \frac{e}{a} e^{-2r/a} \left(1 + \frac{a}{r} \right)$$

(2) Für $r \gg a$ ist $a/r \to 0$, also lautet die Feldstärke in r-Richtung

$$E_r = \frac{2e}{a^2} e^{-2r/a}$$

und das dazugehörige Potential

$$\Phi(r) = \frac{e}{a} e^{-2r/a}$$

Wir haben also gar keine Proportionalität mit $1/r$ oder $1/r^2$. Der Exponentialterm kommt von der ladungsverteilung der Elektronenwolke. Für große Abstände sieht es also so aus, als wäre das Wasserstoffatom eine Kugel mit Radius a und einer Elektronenwolkenförmigen Ladungsverteilung.
Hingegen für $a \gg r$ ist $r/a \to 0$. Schreiben wir E_r um, so erhalten wir

$$E_r = \frac{2e}{r^2} e^{-2r/a} \left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{r}{a} + \left(\frac{r}{a} \right)^2}_{\approx 0} \right) = \frac{e}{r^2} e^{-2r/a} \approx \frac{e}{r^2}$$

und das Potential

$$\Phi = \frac{e}{r} e^{-2r/a} \left(1 + \frac{r}{a} \right) = \frac{e}{r} e^{-2r/a} \approx \frac{e}{r}$$

Was in etwa der Formel für eine Punktladung entspricht.

13. Aufgabe: Flächenladung

Wir betrachten ein Gaußsches Kästchen mit Volumen V und Grundfläche F, welches einen Teil der Ladungsverteilung welche in der $x - y$-Ebene liegt einschließt und sich jeweils um z nach oben und unten erstreckt. Aus Symmetriegründen kann das $\mathbf{E}$-Feld nur eine z-Komponente besitzen. Das Gaußsche Gesetz lautet in diesem Fall

$$\int\limits_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \hat{n} \text{ dA} = \int\limits_{\partial V} E_z \text{ dA} = 2E_z F$$

(da die Seitenflächen durch die fehlenden Komponenten von E in x und y-Richtung wegfallen und damit nur die Fläche hinter und vor der Ebene zählt. Diese ist wird einmal als E_+ und das andere Mal als E_- gezählt, wobei sich die beiden nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Durch die verschiedene Richtung der Normalenvektoren haben sie aber doch wieder das selbe Vorzeichen.) und auf der anderen Seite

$$4\pi \int_V \rho \text{ dV} = 4\pi \int_V \rho_F \delta(z) \text{ dV} = 4\pi\rho_F F$$

da der Quader die Grundfläche F hat und die z-Komponente durch die Deltafunktion gerade wegfällt. Also zusammen

$$E_z = 2\pi\rho_F$$

Mit der Beziehung $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ erhält man noch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -2\pi\rho_F \implies \Phi = -2\pi\rho_F z$$

Die anderen Komponenten von $\mathbf{E}$ müssen Null sein, somit hängt auch Φ nur von z ab.

5. Übung

ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK III
(THEORIE C, ELECTRODYNAMIK), WS 2011/12 BLATT 4

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 14. 11. 11
Besprechung: 16. 11. 11

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Matthias Weinreuter	☐ Gruppe 2 Juraj Streicher	☐ Gruppe 3 Philip Wollfarth	☐ Gruppe 4 Ulf Briskot
☐ Gruppe 5 Valentin Bolsinger	☐ Gruppe 6 Robin Roth	☐ Gruppe 7 Julian Stöckel	☐ Gruppe 8 Stefan Miereis
☐ Gruppe 9 Philipp Rudo	☐ Gruppe 10 Marius Bürkle	☐ Gruppe 11 Guillaume Chalons	☐ Gruppe 12 Justus Zorn
☐ Gruppe 13 Yasmin Anstruther			

*

Aufgabe 1: Potential zweier Punktladungen 4

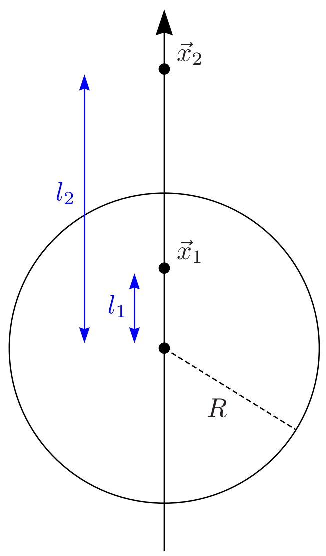
Wir betrachten ein System aus zwei Punktladungen q_1 und $-q_2$ ($q_2 > q_1 > 0$) an den Orten $\vec{x_1} = 0, \vec{x_2} = (0, 0, a)$. Zeigen Sie: Das Potential verschwindet auf einer Kugelfläche vom Radius R, deren Zentrum auf der z-Achse liegt und von den Punktladungen die Abstände l_1, l_2 hat. l_1, l_2 und R hängen durch

$$\frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2, \qquad R^2 = l_1 l_2$$

zusammen.

*8. November 2011 12:28 Uhr

(bitte wenden)



Aufgabe 2: Linearer Quadrupol	3

Ein linearer elektrischer Quadrupol bestehe aus drei Punktladungen, die entlang der z-Achse angeordnet sind: die Ladung q an der Position $(0, 0, a)$, die Ladung $-2q$ an der Position $(0, 0, 0)$ und die Ladung q an der Position $(0, 0, -a)$.

i) Berechnen Sie das Potential für sehr große Abstände $r := |\vec{x}| \gg a$ in führender Ordnung in a. *2P*

ii) Berechnen Sie die zum in i) berechneten Quadrupol-Potential gehörende Feldstärke in den beiden Orthonormalbasen $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ und $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$. *1P*

Aufgabe 3: Spiegelladung	5

i) Berechnen Sie mit der Methode der Spiegelladungen das Potential einer geerdeten, leitenden Kugel vom Radius R und einer Punktladung q im Abstand $a > R$ vom Kugelmittelpunkt. *2P*

ii) Wie ist die Oberflächenladung auf der Kugeloberfläche verteilt? *2P*

iii) Welche Kraft wirkt auf die Ladung q? *1P*

14. Aufgabe: Potential zweier Punktladungen

Wir verschieben das Koordinatensystem so, dass der Nullpunkt im Mittelpunkt der benannten Kugel liegt. Für die Orte der Punktladungen gilt dann

$$\mathbf{x}_1 = (0, 0, l_1) \qquad \mathbf{x}_2 = (0, 0, l_2)$$

und damit für das Potential

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x, y, z) = \frac{q_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - l_1)^2}} - \frac{q_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - l_2)^2}}$$

Nun lösen wir die binomischen Formeln auf und benutzen die Identität

$$q_2 = q_1 \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$$

auf dem Blatt

$$\Phi(x, y, z) = q_1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2zl_1 + l_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2zl_2 + l_2^2}} \right)$$

Zur Abkürzung schreiben wir

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

und schreiben den hinteren Nenner um

$$= q_1 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2zl_1 + l_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 l_1}{l_2} - 2zl_1 + l_1 l_2}} \right)$$

Betrachten wir dieses Potential jetzt für einen Punkt auf der Kugeloberfläche. Für ihn gilt sichtlicherweise:

$$r^2 = R^2$$

damit er auf der Kugel liegt. Setzen wir dies also ein

$$\tilde{\Phi}(x, y, z) = q_1 \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - 2zl_1 + l_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{l_1 l_2 - 2zl_1 + \frac{R^2 l_1}{l_2}}} \right)$$

Mit der Identität $R^2 = l_1 l_2$ auf dem Blatt wird hieraus

$$\tilde{\Phi}(x, y, z) = q_1 \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - 2zl_1 + l_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2zl_1 + l_1^2}} \right)$$

was offensichtlich 0 ergibt. Also haben wir die Behauptung gezeigt.

15. Aufgabe: Linearer Quadrupol

(a) Wir betrachten die Ladungen q_1, q_2, q_3 mit

$$q_1 = q, \mathbf{r_1} = (0, 0, a) \qquad q_2 = -2q, \mathbf{r_2} = (0, 0, 0) \qquad q_3 = q, \mathbf{r_3} = (0, 0, -a)$$

Für einen beliebigen Punkt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ergibt sich das Potential erst einmal als Superposition der Einzelpotentiale:

$$\Phi(\mathrm{r}) = \Phi(x, y, z) = \sum_i \frac{q_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r_i}\|}$$

Setze $C = x^2 + y^2$ und die Formel lässt sich ausschreiben als

$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{\sqrt{C + (z - a)^2}} + \frac{-2q}{\sqrt{C + z^2}} + \frac{q}{\sqrt{C + (z + a)^2}}$$

Für sehr große Abstände berachten wir einfach eine Taylorentwicklung dieses Ausdrucks für $a \ll 1$. Dazu müssen wir die Taylorformel aufstellen

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(x, y, z)_{a=0} + \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial a}\bigg|_{a=0} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial a^2}\bigg|_{a=0} a^2 + O(a^3)$$

1. Schritt $\Phi(x, y, z)_{a=0} = 0$, denn

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, z)_{a=0} &= \left. \frac{q}{\sqrt{C + (z - a)^2}} + \frac{-2q}{\sqrt{C + z^2}} + \frac{q}{\sqrt{C + (z + a)^2}} \right|_{a=0} \\
&= \frac{q}{\sqrt{C + z^2}} + \frac{-2q}{\sqrt{C + z^2}} + \frac{q}{\sqrt{C + z^2}} \\
&= \frac{2q}{\sqrt{C + z^2}} + \frac{-2q}{\sqrt{C + z^2}} = 0
\end{aligned}$$

2. Schritt $\frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial a}\big|_{a=0} = 0$, denn der mittlere Summand enthält kein a (seine Ableitung ist also 0) und für die anderen beiden gilt:

$$\frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial a} = -\frac{1}{2}\frac{2q(z-a)(-1)}{(C+(z-a)^2)^{(3/2)}} + 0 - \frac{1}{2}\frac{2q(z+a)}{(C+(z+a)^2)^{(3/2)}}$$

und somit

$$\left.\frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial a}\right|_{a=0} = -q\left(\frac{-z}{(C+z^2)^{(3/2)}} + \frac{z}{(C+z^2)^{(3/2)}}\right) = 0$$

3. Schritt Der gesuchte Wert:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi(x,y,z)}{\partial a^2} &= \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial a}\right) \\ &= -q\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a-z}{(C+(z-a)^2)^{3/2}} + \frac{z+a}{(C+(z+a)^2)^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

Betrachten wir dies summandenweise:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a-z}{(C+(z-a)^2)^{3/2}}\right) &= \frac{(C+(z-a)^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(a-z)(C+(z-a)^2)^{1/2}2(z-a)(-1)}{(C+(z-a)^2)^{6/2}} \\ &= \frac{1}{(C+(z-a)^2)^{3/2}} - \frac{3(z-a)^2}{(C+(z-a)^2)^{5/2}}\end{aligned}$$

und für $a=0$

$$\frac{1}{(C+z^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(C+z^2)^{5/2}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{z+a}{(C+(z+a)^2)^{3/2}}\right) &= \frac{(C+(z+a)^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(z+a)(C+(z+a)^2)^{1/2}2(z+a)}{(C+(z+a)^2)^{6/2}} \\ &= \frac{1}{(C+(z+a)^2)^{3/2}} - \frac{3(z+a)^2}{(C+(z+a)^2)^{5/2}}\end{aligned}$$

und für $a=0$

$$\frac{1}{(C+z^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(C+z^2)^{5/2}}$$

Insgesamt erhält man also

$$\left.\frac{\partial^2 \Phi(x,y,z)}{\partial a^2}\right|_{a=0} = \frac{6qz^2}{(C+z^2)^{5/2}} - \frac{2q}{(C+z^2)^{3/2}} = \frac{6qz^2 - 2q(C+z^2)}{(C+z^2)^{5/2}}$$

Nun müssen wir unsere Ergebnisse nur noch in die Taylorformel einsetzen:

$$\Phi(x,y,z) \approx 0 + 0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi(x,y,z)}{\partial a^2}\bigg|_{a=0} a^2$$

und mit $C = x^2 + y^2$ erhalten wir

$$\Phi(x,y,z) \approx -qa^2\frac{x^2+y^2+z^2-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = -q\frac{(x^2+y^2-2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}a^2$$

(b) Nun wollen wir die Feldstärke zu diesem Potential berechnen. Zuerst in kartesischen Koordinaten. Leiten wir also zuerst nach x ab:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -qa^2\left(\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{5x\,(x^2+y^2-2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}}\right) = \frac{3a^2qx\,(x^2+y^2-4z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}}$$

durch Anwendung der Produkt oder Quotientenregel. Für y ergibt sich analog

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{3a^2qy\,(x^2+y^2-4z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}}$$

Das Vorgehen fü die z-Komponente ist analog, das Ergebnis aufgrund des anderen Zählers jedoch verschieden

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{3a^2qz\,(-3x^2-3y^2+2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}}$$

Insgesamt hat man für das **E**-Feld in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{E}(x,y,z) = -\nabla\Phi(x,y,z) = \frac{3a^2q}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}}\begin{pmatrix} x\,(x^2+y^2-4z^2) \\ y\,(x^2+y^2-4z^2) \\ z\,(3x^2+3y^2-2z^2)\end{pmatrix}$$

Für die Betrachtung in Kugelkoordinaten schreiben wir Φ in Kugelkoordinaten um. Es gilt

$$r^2 = x^2+y^2+z^2 \qquad z = r\cos\theta$$

also

$$\Phi(r,\theta,\phi) = -qa^2\frac{r^2-3z^2}{r^5} = \frac{qa^2}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

Nun leiten wir dies nach r ab und erhalten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{3qa^2}{r^4}(3\cos^2\theta - 1)$$

Nach θ ergibt sich

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{6qa^2}{r^3}\cos\theta\sin\theta$$

und nach ϕ sogar noch einfacher 0. Schreiben wir den ∇-Operator jetzt noch in Kugelkoordinaten um (siehe ÜB 2), so erhalten wir

$$\mathbf{E}(r,\theta,\phi) = -\nabla_K \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + O\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right) = -\frac{3qa^2}{r^4}\begin{pmatrix} 3\cos^2\theta - 1 \\ 2\cos\theta\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

16. Aufgabe: Spiegelladung

(a) Wir betrachten das Potential das entsteht, wenn die Ladung q am Ort $\mathbf{r} = (0,0,a)$ und die Spiegelladung q_B am Ort $\mathbf{r}_B = (0,0,b)$ liegen. Um das Potential außerhalb der Kugel nicht zu verfälschen, muss natürlich $R > b$ gelten. Das Potential lautet dann

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x,y,z) = \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} + \frac{q_B}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}$$

Damit jetzt die Kugel geerdet ist, also die Randbedingung erfüllt ist, muss zum Beipsiel gelten

$$\Phi(0,0,R) = \Phi(0,0,-R) = 0 \tag{1}$$

Da es sich hierbei nur um 2 Unbekannte handelt, benötigen wir auch nur 2 Gleichungen. Wir werden zeigen, dass dann auch allgemein das Potential auf der Kugel 0 ist. Berechne also q_B und b über (1):

$$\begin{aligned} \Phi(0,0,R) &= \frac{q}{|R-a|} + \frac{q_B}{|R-b|} \overset{a>R>b}{=} \frac{q}{a-R} + \frac{q_B}{R-b} \\ \Phi(0,0,-R) &= \frac{q}{|R+a|} + \frac{q_B}{|R+b|} = \frac{q}{a+R} + \frac{q_B}{R+b} \end{aligned}$$

Nun werden beide Gleichungen nach q_B aufgelöst und man erhält

$$q_B = -q\frac{R-b}{a-R} = -q\frac{R+b}{R+a} \implies (R-b)(R+a) = (R+b)(a-R)$$

Ausmultipliziert erhält man

$$R^2 - Rb + Ra - ab = Ra + ab - R^2 - br \implies b = \frac{R^2}{a}$$

Dies können wir wieder in die Gleichung für q_B einsetzen und erhalten schließlich

$$q_B = q\frac{R - \frac{R^2}{a}}{R-a} = -q\frac{R}{a}$$

Nun setzen wir dies wieder in die Formel für Φ ein und lösen die binomische Formel auf:

$$\Phi(x,y,z) = q\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2za+a^2}} - \frac{R}{a}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-\frac{2R^2z}{a}+\frac{R^4}{a^2}}}\right)$$

Für bessere Übersichtlichkeit setzen wir $r^2 = x^2+y^2+z^2$ und vereinfachen weiter:

$$\Phi(x,y,z) = q\left(\frac{1}{\sqrt{r^2-2az+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{ar}{R}\right)^2 - 2za + R^2}}\right)$$

Befinden wir uns jetzt gerade auf der Kugel, so gilt $r^2 = R^2$ und das Potential wird gerade 0. Also ist die Randbedingung für diese Wahl der Spiegelladung erfüllt.

(b) Benutze

$$4\pi\sigma = \vec{n}\vec{E}_\perp$$

Achtung: Es muss die ganze Feldstärke betrachtet werden, die Ergänzung sei dem Leser überlassen.

Wir wollen das E-Feld der inneren (Spiegel-)Ladung in radialer Komponente betrachten, deshalb schreiben wir Φ in Kugelkoordinaten um

$$\Phi(r,\theta,\phi) = -q\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{ar}{R}\right)^2 - 2r\cos\theta a + R^2}}\right)$$

Geändert hat sich eigentlich nur die Darstellung von z. Nun leiten wir nach r ab, um E_r zu erhalten:

$$E_r = q\frac{\frac{a}{R}r - a\cos\theta}{\left(\left(\frac{ar}{R}\right)^2 - 2ra\cos\theta + R^2\right)^{3/2}}$$

und für $r = R$ (also auf der Kugelschale)

$$E(R)_r = qa\frac{1-\cos\theta}{(a^2 + R^2 - 2a\cos\theta)^{3/2}}$$

Somit ist die Ladung auf der Kugel (abhängig von θ):

$$\rho(\theta) = \frac{1}{4\pi}E(R)_r$$

(c) Die Kraft auf die Ladung wird natürlich durch die Anziehung der Spiegelladung hervorgerufen. Diese hat das Potential

$$\Phi_B(x,y,z) = \frac{-q}{\sqrt{\left(\frac{ar}{R}\right)^2 - 2za + R^2}}$$

Aus Symmetriegründen ist die Kraft in x und y-Richtung Null. Deshalb soll hier nur die z-Komponente berechnet werden. Zuerst leiten wir daraus das elektrische Feld in z-Richtung her. Dazu leiten wir die Formel für Φ_B nach z ab und beachten $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$:

$$\frac{\partial\Phi_B}{\partial z} = \frac{q\left(\frac{a^2 z}{R^2} - a\right)}{\left(\left(\frac{ar}{R}\right)^2 - 2az + R^2\right)^{3/2}} = -E_z$$

und an der Stelle der Ladung, also für $r = z = a$ gilt

$$-E_z(0,0,a) = qR\frac{a^3 - R^2 a}{(a^4 - 2R^2a^2 + R^4)^{3/2}} = qaR\frac{a^2 - R^2}{(a^2-R^2)^3} = \frac{qaR}{(a^2-R^2)^2}$$

Also ist die Kraft mit $\mathbf{F} = \mathbf{E}q$

$$\mathbf{F} = q^2 \frac{aR}{\left(a^2 - R^2\right)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in z-Richtung zum Ursprung hin.

6. Übung

ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK III
(THEORIE C, ELECTRODYNAMIK), WS 2011/12 — BLATT 5

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 21. 11. 11
Besprechung: 23. 11. 11

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Matthias Weinreuter	☐ Gruppe 2 Juraj Streicher	☐ Gruppe 3 Philip Wollfarth	☐ Gruppe 4 Ulf Briskot
☐ Gruppe 5 Valentin Bolsinger	☐ Gruppe 6 Robin Roth	☐ Gruppe 7 Julian Stöckel	☐ Gruppe 8 Stefan Miereis
☐ Gruppe 9 Philipp Rudo	☐ Gruppe 10 Marius Bürkle	☐ Gruppe 11 Guillaume Chalons	☐ Gruppe 12 Justus Zorn
☐ Gruppe 13 Yasmin Anstruther			

*

Aufgabe 1: Dielektrika — 3

Gegeben seien zwei dielektrische Halbräume mit den Dielektrizitätskonstanten ϵ und ϵ'. Im ersten Halbraum (ϵ) befinde sich eine Ladung q im Abstand a von der Grenzfläche.

i) Berechnen Sie das elektrostatische Potential dieser Anordnung (Hinweis: Methode der Spiegelladungen). *2P*

ii) Diskutieren Sie die Fälle $\epsilon = \epsilon'$ und $\epsilon' \to \infty$. *1P*

Aufgabe 2: Greensche Funktion — 6

Auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R sei das Potential $U(\theta, \varphi)$ vorgegeben.

i) Geben Sie die Greensche Funktion $G_D(\vec{x}, \vec{x}')$ für das Dirichletsche Randwertproblem für den Außenraum der Kugel an. *1P*

*8. November 2011 19:05 Uhr

(bitte wenden)

Hinweis: Zeigen Sie, dass das in Blatt 4, Aufgabe 3 berechnete Potential bereits G_D für den speziellen Fall $\vec{x}' = (0, 0, z')$ ergibt, und finden Sie hieraus G_D für allgemeines $\vec{x}'$.

Wie lautet G_D für den Innenraum der Kugel?

ii) Zeigen Sie, dass das Potential im Innenraum $r < R$ (Außenraum $r > R$) in der Form *1P*

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{R|R^2 - r^2|}{4\pi} \int d\Omega' \frac{U(\theta', \varphi')}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\alpha)^{3/2}} \,,$$

dargestellt werden kann, wenn der Innenraum (Außenraum) der Kugel ladungsfrei ist. Hierbei ist $\cos\alpha = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$ und $d\Omega' = \sin\theta' d\theta' d\varphi'$.

iii) Berechnen Sie mit Hilfe von $ii)$ das Potential entlang der positiven z-Achse für die auf der Kugeloberfläche vorgegebenen Potentiale $U_1 = q = \text{const}$ und $U_2 = \cos\theta$. Entspricht das Resultat für U_1 Ihren Erwartungen? Wenn U_2 als von einer Ladungsverteilung erzeugt gedacht wird, was kann für die zugehörige Gesamtladung aus dem Resultat für $\Phi(z > R)$ geschlossen werden? *2P*

iv) Zeigen Sie, dass das Potential aus $ii)$ für $r < R$ in die äquivalente Form *2P*

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} C_{lm} \left(\frac{r}{R}\right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \,,$$

übergeführt werden kann, wobei

$$C_{lm} = \int d\Omega' Y^*_{lm}(\theta', \varphi') U(\theta', \varphi') \,.$$

Aufgabe 3: Potential im Quader 3

Gegeben sei ein Quader mit den Kantenlängen a, b und c in x-, y- und z-Richtung. Alle Seitenflächen bis auf zwei befinden sich auf dem Potential Null, nur die Flächen $z = c$ und $y = b$ haben beliebige Potentiale $U(x, y)$ und $V(x, z)$.

i) Berechnen Sie das Potential im Inneren des Quaders. *2P*

ii) Was ergibt sich für den Spezialfall $U = V = k = \text{const}$? *1P*

17. Aufgabe: Dielektrika

Wir setzen für das Potential ϕ einen Tei ϕ_1 im Halbraum mit der Ladung q an und einen Teil ϕ_2 im Halbraum ohne Ladung. Für das erste Potential setzen wir

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \frac{q}{\varepsilon|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} + \alpha\frac{q}{\varepsilon|\mathbf{x}+\mathbf{a}|}$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstante α und dem Vektor $\mathbf{a}$ mit Länge a in x-Richtung von der Trennschicht weg. Im Halbraum 2 gibt es keine Ladung und deshalb auch keine Spiegelladung (würden wir eine ansetzen, so müsste sie sich in diesem Halbraum 2 befinden und würde somit das Ergebnis verfälschen!). Wir setzen also

$$\phi_2(\mathbf{x}) = \beta\frac{q}{\varepsilon|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}$$

wieder mit einer Konstanten β.
Nun betrachten wir die Stetigkeitsbedingungen. Einmal muss die Tangentialkomponente von $\mathbf{E}$ stetig sein. Mit der (etwas stärkeren) Forderung

$$\phi_1 = \phi_2$$

für die Grenzfläche ist auch die Tangentialkomponente von $\mathbf{E}$ auf jeden Fall stetig. Also muss gelten

$$\phi_1(0,y,z) = \frac{q}{\varepsilon\sqrt{a^2+y^2+z^2}}(1+\alpha) = \phi_2(0,y,z) = \frac{q}{\varepsilon\sqrt{a^2+y^2+z^2}}\beta$$

oder einfach

$$1+\alpha = \beta$$

Die andere Bedingung betrifft die Normalkomponenten von $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, also die Ableitung von ϕ nach der Normalen x. Da keine freien Ladungen vorhanden sind, müssen auch diese an der Grentfläche übereinstimmen, also

$$\varepsilon\frac{\partial\phi_1}{\partial n}(0,y,z) = \varepsilon\frac{aq}{\varepsilon(a^2+y^2+z^2)^{(3/2)}}(-1+\alpha) = \varepsilon'\frac{\partial\phi_2}{\partial n}(0,y,z) = -\varepsilon'\frac{aq}{\varepsilon(a^2+y^2+z^2)^{(3/2)}}\beta$$

oder einfach

$$\varepsilon(1-\alpha) = \varepsilon'\beta$$

Die beiden Gleichungen für α und β lassen sich jetzt auflösen und man erhält

$$\beta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(2-\beta) \qquad \beta = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon'}$$

und

$$\alpha = \beta - 1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}$$

insgesamt also die Potentiale

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \frac{q}{\varepsilon|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} + \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\right)\frac{q}{\varepsilon|\mathbf{x}+\mathbf{a}|}$$

$$\phi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon + \varepsilon'}\frac{2q}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}$$

Für $\varepsilon = \varepsilon'$ ergibt sich

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \frac{q}{\varepsilon|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}$$

da der hintere Teil gerade wegfällt und

$$\phi_2(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x})$$

da auch im Nenner dann 2ε steht. Also insgesamt das ganz normale Potential einer Punktladung im Dielektrikum mit Dielektrizitätszahl ε (wie erwartet).

Für $\varepsilon' \to \infty$ geht

$$\alpha \to -1 \text{ und } \beta \to 0$$

und somit

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \frac{q}{\varepsilon|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} - \frac{q}{\varepsilon|\mathbf{x}+\mathbf{a}|} \qquad \phi_2(\mathbf{x}) = 0$$

Dies ist das Potential, welches von einer Punktladung vor einer Metallplatte erzeugt wird (mit um ε verminderter Ladung). Das Medium mit $\varepsilon' \to \infty$ kann als perfekter Leiter aufgefasst werden.

18. Aufgabe: Greensche Funktion

(1) Auf Blatt 4 Aufgabe 3 wurde ein Potential der Form

$$\phi(\mathbf{x}) = q\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2za + a^2}} - \frac{R}{a}\frac{1}{\sqrt{r^2 - \frac{2R^2 z}{a} + \frac{R^4}{a^2}}}\right)$$

berechnet mit $r = |\mathbf{x}|$ und $\mathbf{x}' = a\hat{e}_z$. Die dazugehörige Greensche Funktion lautet also

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{\frac{R}{r'}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_B|}$$

mit dem neuen Vektor $\mathbf{x}'_B$ der in die Richtung von $\mathbf{x}'$ zeigt, aber nur noch die Länge R^2/r' hat. r' soll hier immer die Länge von $\mathbf{x}'$ angeben. Diese Greensche Funktion erfüllt sichtlich das Problem in Aufgabe 3 auf Blatt 4. Doch auch für ein allgemeines $\mathbf{x}'$, das nicht auf der z-Achse liegt, ist dies eine mögliche Greensche Funktion. Denn bei einem allgemeinem $\mathbf{x}'$ lassen sich die Achsen so drehen, dass $\mathbf{x}'$ wieder auf der z-Achse liegt und die Greensche Funktion geht in die einfache Greensche Funktion von Aufgabe 3 Blatt 4 über.

Betrachte also jetzt $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ in Kugelkoordinaten, also

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}' \text{ analog}$$

Möchte man jetzt den Abstand $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ zweier Vektoren in Kugelkoordinaten bestimmen, so muss man die Differenz aller kartesischer Koordinaten quadrieren und summieren. Dabei ergänzen sich die Terme mit r^2 und r'^2 jeweils mit $\sin^2 + \cos^2 = 1$ und man erhält

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'(\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi')))$$

Beim letzten Term benutzt man noch

$$\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi' = \cos(\phi - \phi')$$

und erhält

$$G_D(\mathrm{x},\mathrm{x}') = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\alpha}} - \frac{\frac{R}{r'}}{\sqrt{r^2 + (\frac{R^2}{r'})^2 - 2r\frac{R^2}{r'}\cos\alpha}}$$

mit der Definition von $\cos\alpha$ auf dem Blatt. Für den Innenraum lautet die Greensche Funktion genauso, mit gleichem Vorzeichen, da nur x und x' die Rollen tauschen.

(2) Im Außenraum zeigt die Ableitung der Normalen nach innen, deswegen kommt noch ein Minus davor, im Innenraum hat die normale ein postives Vorzeichen.

Wir benutzen den Greenschen Satz und kommen auf

$$\phi(\mathbf{x}) = \int\limits_V G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\delta V} \mathrm{dA}' \ \frac{\partial G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'}\phi(x')$$

Nun befindet sich aber im gerade betrachteten Teil keine Ladung, also fällt der erste Summand weg. Für $\phi(\mathbf{x}')$ setzen wir $U(\theta',\phi')$, da so das Potential auf der Randfläche des Volumens definiert wurde (siehe Aufgabenstellung). Außerdem erhalten wir mit $\mathrm{dA} = r^2\sin\theta \ \mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}\phi$ die Gleichung

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{R^2}{4\pi}\int\limits_{\delta V} \mathrm{d}\Omega' \frac{\partial G_D}{\partial n'} U(\theta',\phi')$$

Die Ableitung von G_D nach der Normalenkomponente ist gerade die Ableitung nach r'. Zuerst für den Außenraum: Diese ist gegeben durch

$$\frac{\partial G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'} = \frac{R/r'^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{r'}\right)^2 - 2r\frac{R^2}{r'}\cos\alpha}} + \frac{R/r'^4\,(rr'R^2\cos\alpha - R^4)}{\left(r^2 + \left(\frac{R^2}{r'}\right)^2 - 2r\frac{R^2}{r'}\cos\alpha\right)^{3/2}}$$

$$+\frac{\cos\alpha r - r'}{(r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\alpha)^{3/2}}$$

und mit $r' = R$

$$= \frac{r^2 - R^2}{R\,(r^2 - 2rR\cos\alpha + R^2)^{3/2}}$$

Für den Innenraum bekommt man gerade ein anderes Vorzeichen. Da dann aber $r^2 - R^2 < 0$ ist, kann man auch einfach $|r^2 - R^2|$ schreiben und erhält immer das richtige

Vorzeichen. Insgesamt ergibt sich also die Formel auf dem Aufgabenblatt:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{R|R^2 - r^2|}{4\pi} \int\limits_{\delta V} \mathrm{d}\Omega' \frac{U(\theta', \phi')}{\left(r^2 - 2rR\cos\alpha + R^2\right)^{3/2}}$$

(3) Nun sollen exemplarisch ein paar Potentialverteilungen betrachtet werden. Der Punkt $\mathbf{x}$ liegt immer auf de z-Achse. Für ihn gilt also $\theta = 0$ und $r = z$. Insbesondere ist also $\cos\alpha = \cos\theta'$.

Für das Potential $U_1 = q$ Jetzt lautet die Gleichung für ϕ:

$$\phi(z) = \frac{qR|R^2 - z^2|}{4\pi} \int\limits_{\delta V} \frac{\sin\theta' \, \mathrm{d}\theta' \, \mathrm{d}\phi'}{\left(z^2 - 2zR\cos\theta' + R^2\right)^{3/2}}$$

Da der Integrant nicht von ϕ' abhängt, liefert dies den Faktor 2π. Glücklicherweise steht im Zähler schon fast die Ableitung des Nenners und man erhält

$$\begin{aligned}\phi(z) &= -\frac{q|R^2 - z^2|}{2z} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2 + 2zR}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR}} \right) \\ &= -\frac{q|R^2 - z^2|}{2z} \left(\frac{1}{|z + R|} - \frac{1}{|z - R|} \right)\end{aligned}$$

Für $R > z$ wird daraus $\phi = q$ und für $R < z$ $\frac{qR}{z}$. Dies war zu erwarten, denn das Potential q erzeugt sozusagen eine Gesamtladung qR im Nullpunkt und deshalb lässt sich das Potential außerhalb (sehr salopp!) also $\frac{qR}{z}$ schreiben. Innen muss das Potential konstant sein (aus Symmetriegründen und da $\mathbf{E}$ 0 ist.).

Für das Potential $U_2 = \cos\theta$ Hier lautet die Gleichung jetzt

$$\phi(z) = \frac{R|R^2 - z^2|}{4\pi} \int\limits_{\delta V} \frac{\sin\theta' \cos\theta' \, \mathrm{d}\theta' \, \mathrm{d}\phi'}{\left(z^2 - 2zR\cos\theta' + R^2\right)^{3/2}}$$

Wir benutzen partielle Integration mit den Teilfunktionen

$$f' = \frac{\sin\theta'}{\left(z^2 - 2zR\cos\theta' + R^2\right)^{3/2}} \qquad f = -\frac{1}{Rz} \frac{1}{\left(z^2 - 2zR\cos\theta' + R^2\right)^{1/2}}$$

und

$$g = \cos\theta' \qquad g' = -\sin\theta'$$

Also erhalten wir für $R > z$ (Rechnung analog zu oben)

$$\phi(z) = \frac{z}{R}$$

und für $z > R$

$$\phi(z) = \frac{R^2}{z^2}$$

$$\sigma = \frac{\partial\phi}{\partial n}|_{n=R}\frac{1}{4\pi} = \frac{1}{2\pi R}$$

$$Q = \oint_S = \sigma \text{ dA} = 2R$$

$$Q_{ges} = 0$$

(4)

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_{lm}\left(\frac{r}{R}\right)^l Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Mit

$$C_{lm} = \int \mathrm{d}\Omega' Y^*_{lm}(\theta',\varphi')U(\theta',\varphi')$$

$$\phi = \frac{R|R^2 - r^2|}{4\pi}\int \mathrm{d}\Omega' \frac{U(\theta',\varphi')}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\overset{r'=R}{=} \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r^l}{R^{l+1}}Y^*_{lm}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Verwende $\frac{r}{R} = t$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(rR)^{\frac{1}{2}}\left(t+\frac{1}{t}-2\cos\alpha\right)^{\frac{1}{2}}} &= \sum_{l}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}t^{l+\frac{1}{2}}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) \\
\frac{\text{d von dem oben drüber}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{t}}{\left(t+\frac{1}{t}-2\cos\alpha\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \sum_{l}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi(l+\frac{1}{2})}{2l+1}t^{l-\frac{1}{2}}Y_{lm}^*Y_{lm}
\end{aligned}$$

$$\frac{R(R^2-r^2)}{(r^2+R^2-2rR\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{l}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}4\pi\left(\frac{r}{l}\right)^{l}Y_{lm}^*Y_{lm}$$

Somit

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(\frac{r}{R}\right)^{l}\int \mathrm{d}\Omega' U(\theta',\varphi')Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta',\varphi')$$

Mit der Definition von C_{lm} steht das gewünschte Ergebniss da.

19. Aufgabe: Potential im Quader

(i) Wir setzen die Laplacegleichung für das Potential ϕ in kartesischen Koordinaten an

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi = 0$$

Als Ansatz wählen wir jetzt (motiviert durch den Ansatz in der Vorlesung) $\phi = \phi_1 + \phi_2$ mit

$$\phi_1 = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sinh(\gamma_{nm}z) \qquad \phi_2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{nm}\sin(\alpha_n x)\sin(\beta'_m z)\sinh(\gamma'_{nm}y)$$

mit

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} \qquad \beta_m = \frac{m\pi}{b} \qquad \gamma_{nm} = \sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}$$

und analog

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} \qquad \beta'_m = \frac{m\pi}{c} \qquad \gamma'_{nm} = \sqrt{\alpha_n^2+(\beta')_n^2}$$

ϕ erfüllt die Laplacegleichung Betrachte exemplarisch ϕ_1 (mit vertauschten Koordinaten funktioniert die Beweisführung für ϕ_2 analog). Dann ist

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = -\sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\alpha_n^2 \sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sinh(\gamma_{nm} z)$$

da die doppelte Ableitung des Sinus der negative Sinus ist. Außerdem

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = -\sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\beta_n^2 \sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sinh(\gamma_{nm} z)$$

analog. Schließlich gilt noch

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\gamma_n^2 \sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sinh(\gamma_{nm} z)$$

da die doppelte ABleitung des Sinushyperbolicus wieder der Sinushyperbolicus ist. Nun sind aber die Konstanten α_n, β_m und γ_{nm} gerade so gewählt, dass $\alpha_n^2 + \beta_m^2 - \gamma_{nm}^2 = 0$ gilt und damit erfüllt ϕ_1 die Laplacegleichung. Also erfüllt auch ganz ϕ die Laplacegleichung.

Die Randbedingungen sind erfüllt. Es gilt

$$\sin(0) = 0 \qquad \sin(n\pi) = 0 \qquad \sinh(0) = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch

$$\phi(0,\cdot,\cdot) = 0 \qquad \phi(\cdot,0,\cdot) = 0 \qquad \phi(\cdot,\cdot,0) = 0$$

und

$$\phi(a,\cdot,\cdot) = 0 \qquad \phi_1(\cdot,b,\cdot) = 0 \qquad \phi_2(\cdot,\cdot,c) = 0$$

Somit sind die Randbedingungen für die 4 trivialen Seiten erfüllt. Für die Seite $z = c$ gilt jetzt

$$U(x,y) = \phi(x,y,c) = \phi_1(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sinh(\gamma_{nm} c)$$

oder anders geschrieben und etwas erweitert

$$\frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{U(x,y)}{\sinh(\gamma_{mn}c)} = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\alpha_n x) \sqrt{\frac{2}{b}} \sin(\beta_n y)$$

Nun können wir die Orthogonalität der Fourierreihe ausnutzen und dies mithilfe der konjungierten Funktionen (die in diesem Fall die selben sind!) auf beiden Seiten erweitern. Wähle also feste $n, m \in \mathbb{N}$. Auf der rechten Seite steht also nur dann etwas, wenn diese n, m auch getroffen werden, also nur bei einem Summanden. Insgesamt erhält man

$$\frac{4}{ab} \int\limits_0^a \int\limits_0^b \mathrm{dxdy} \; \frac{U(x,y)}{\sinh(\gamma_{mn}c)} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) = A_{nm}$$

und vollkommen analog

$$\frac{4}{ac} \int\limits_0^a \int\limits_0^c \mathrm{dxdz} \; \frac{V(x,z)}{\sinh(\gamma'_{mn}b)} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta'_m z) = B_{nm}$$

Somit sind auch die Randbedingungen erfüllt. In der Kugel herrscht also ein Potential mit diesen Konstanten.

(ii) Mit $V \equiv U \equiv k$ konstant werden die A_{nm} und B_{nm} zu

$$A_{nm} = \frac{4}{ab} \int\limits_0^a \int\limits_0^b \mathrm{dxdy} \; \frac{U(x,y)}{\sinh(\gamma_{mn}c)} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) = \frac{4k}{ab \sinh(\gamma_{mn}c)} \int\limits_0^a \int\limits_0^b \mathrm{dxdy} \; \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y)$$

Dieses Integral ist jetzt einfach analytisch lösbar. Mit $\int_0^\pi \mathrm{dx} \; \sin(x) = -[\cos(x)]_0^\pi = 2$ erhält man

$$A_{nm} = \frac{4k}{ab \sinh(\gamma_{mn}c)} \frac{2 \cdot 2}{\alpha_n \beta_n} = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{nm} \frac{1}{\sinh(\gamma_{nm}c)}$$

und wieder analog

$$B_{nm} = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{nm} \frac{1}{\sinh(\gamma'_{nm}b)}$$

und insgesamt

$$\phi(x,y,z) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{nm} \left(\sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \frac{\sinh(\gamma_{nm} z)}{\sinh(\gamma_{nm} c)} + \sin(\alpha_n x) \sin(\beta'_m z) \frac{\sinh(\gamma'_{nm} y)}{\sinh(\gamma'_{nm} b)} \right)$$

7. Übung

ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK III
(THEORIE C, ELECTRODYNAMIK), WS 2011/12 — BLATT 6

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 28. 11. 11
Besprechung: 30. 11. 11

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Matthias Weinreuter	☐ Gruppe 2 Juraj Streicher	☐ Gruppe 3 Philip Wollfarth	☐ Gruppe 4 Ulf Briskot
☐ Gruppe 5 Valentin Bolsinger	☐ Gruppe 6 Robin Roth	☐ Gruppe 7 Julian Stöckel	☐ Gruppe 8 Stefan Miereis
☐ Gruppe 9 Philipp Rudo	☐ Gruppe 10 Marius Bürkle	☐ Gruppe 11 Guillaume Chalons	☐ Gruppe 12 Justus Zorn
☐ Gruppe 13 Yasmin Anstruther			

*

Aufgabe 1: Potential auf der Kugeloberfläche — 3

Auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R sei das Potential $U(\theta,\varphi)$ vorgegeben, und der Raum sowohl innerhalb als auch außerhalb der Kugeloberfläche sei frei von Ladungen. In Blatt 5, Aufgabe 2-iv) wurde gezeigt, dass sich das Potential innerhalb der Kugeloberfläche als

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_{lm}\left(\frac{r}{R}\right)^{l} Y_{lm}(\theta,\varphi)\,,$$

$$C_{lm} = \int d\Omega'\, Y^{*}_{lm}(\theta',\varphi')U(\theta',\varphi')\,,$$

ausdrücken lässt.

i) Wie lautet das entsprechende Resultat für das Potential außerhalb der Kugeloberfläche? *1P*

*15. November 2011 19:15 Uhr

(bitte wenden)

ii) Benützen Sie die obige Formel (und das entsprechende Resultat außerhalb der Kugeloberfläche), um die Potentiale inner- und außerhalb der Kugeloberfläche für die vorgegebenen Potentiale $U_1 = \cos^2\theta$ und $U_2 = \sin\theta\sin\varphi$ auf der Kugeloberfläche zu berechnen. *2P*

Aufgabe 2: Multipolentwicklung 2

Berechnen Sie alle Multipolmomente für

i) eine Kugel mit Radius R und homogener Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = \rho_0 = \text{const.}$ *1P*

ii) die Ladungsverteilung *1P*

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q}{64\pi a^5} r^2 e^{-r/a} \sin^2\theta\,, \quad a > 0\,.$$

Aufgabe 3: Dielektrische Kugel 4

Eine dielektrische Kugel mit Radius R und Dielektrizitätskonstante ϵ wird in ein ursprünglich homogenes elektrisches Feld in z-Richtung (d.h. $\vec{E} = k\vec{e}_z$) eingebracht.

i) Berechnen Sie das resultierende Potential im ganzen Raum. Hinweis: Φ erfüllt die Laplace-Gleichung (warum?). Benützen Sie für die Lösung den zylindersymmetrischen Ansatz $\Phi = \sum_l (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos\theta)$. *2P*

ii) Beschreiben Sie die resultierenden Felder im Innen- und Außenraum der Kugel. Geben Sie die Polarisation der Kugel und die Polarisationsflächenladung an. *2P*

Aufgabe 4: Stromdurchflossener Kreisring 3

i) Berechnen Sie die magnetische Flussdichte eines stromdurchflossenen Kreisrings mit Radius R für einen Punkt auf der Achse des Rings im Abstand a vom Mittelpunkt. Diskutieren Sie die Grenzfälle $a \ll R$ und $a \gg R$. *2P*

ii) Zwei gleichartige, scheibenförmige Spulen, deren Höhe gegen ihren Radius R vernachlässigbar ist, sind so angeordnet, dass sie die z-Achse als gemeinsame Symmetrieachse haben und ihr Abstand gleich $4a$ ist. Die erste Spule befindet sich an der Position $(0, 0, -a)$ und wird vom Strom I durchflossen. Die zweite Spule befindet sich bei $(0, 0, 3a)$, und in ihr fließt der Strom $-8I$. Wie muss a gewählt werden, damit $\vec{B}$ an der Position $z = 0$ verschwindet? *1P*

20. Aufgabe: Potential auf der Kugeloberfläche

(i) Setze $t = \frac{R}{r}, r' = R$

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1}\frac{R^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^* Y_{lm}$$

Umformen und einmal nach t ableiten gibt

$$\frac{\frac{1}{t^2} - 1}{\left(t + \frac{1}{t} - 2\cos\alpha\right)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} 4\pi t^{l-\frac{1}{2}} Y_{lm}^* Y_{lm}$$

durch umformen ergibt sich

$$\frac{R(r^2 - R^2)}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} 4\pi \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_{lm}^* Y_{lm}$$

Mit

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\Omega' U(\theta', \varphi') \frac{R|r^2 - R^2|}{(r^2 + R^2 - 2Rr\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_{lm} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_{lm}\end{aligned}$$

(ii) Wir entwickeln zuerst einmal in Kugelfunktionen. Dazu betrachten wir

$$\begin{array}{ccc} & Y_{00} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} & \\ Y_{1-1} = \frac{1}{2}e^{-i\phi}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta & Y_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta & Y_{11} = -\frac{1}{2}e^{i\phi}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta \\ Y_{2-1} = \frac{1}{2}e^{-i\phi}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cos\theta\sin\theta & Y_{20} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos\theta^2 - 1) & Y_{21} = -\frac{1}{2}e^{i\phi}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cos\theta\sin\theta \end{array}$$

Um jetzt U_1 und U_2 darzustellen, wählen wir die Linearkombinationen

$$U_1 = \cos^2\theta = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\left(Y_{20} + \frac{\sqrt{5}}{2}Y_{00}\right)$$

und

$$U_2 = \sin\theta\sin\phi = i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,(Y_{11} + Y_{1-1})$$

die man schon fast durch scharfes Hinsehen, spätestens aber durch Ausprobieren findet. Da die Kugelflächenfunktionen nach Definition orthogonal sind, ergibt das Skalarprodukt im Integralraum von Y_{lm} mit dem jeweiligen Y_{00}, Y_{20} bzw. Y_{1-1}, Y_{11} genau dann 1, wenn die beiden Indizes gleich sind. Für U_1 ergibt sich also

$$C_{00} = \frac{2}{3}\sqrt{\pi} \qquad C_{20} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}$$

und für U_2

$$C_{1-1} = C_{11} = i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$$

also gerade die Indizes vor den Kugelflächenfunktionen. Die restlichen Cs sind jeweils Null. Setzt man dies jetzt in die Formel auf dem Blatt ein, so erhält man für das Potential Innen für U_1:

$$\phi_1(r,\theta,\phi) = C_{00}\left(\frac{r}{R}\right)^0 Y_{00}(\theta,\phi) + C_{20}\left(\frac{r}{R}\right)^2 Y_{20}(\theta,\phi)$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\pi}\frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\left(3\cos\theta^2 - 1\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{r^2}{R^2} + 3\frac{r^2}{R^2}\cos^2\theta\right)$$

und für U_2

$$\phi_1(r,\theta,\phi) = \frac{r}{R}i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_{11} + Y_{1-1}) = \frac{r}{R}\sin\theta\sin\phi$$

nach der umgekehrten Rechnung wie oben. Für den Außenraum ergeben sich die selben Ergebnisse, nur das der Bruch r/R immer umgekehrt wird und die Potenz um eins erhöht wird.

21. Aufgabe: Multipolentwicklung

Die Formel für die Multipolmomente ist gegeben durch

$$q_{lm} = \int Y^*_{lm}(\theta,\phi) r^l \rho(r,\theta,\phi)\ \mathrm{dx}^3 = \int Y^*_{lm}(\theta,\phi) r^{l+2}\rho(r,\theta,\phi)\sin\theta\ \mathrm{dr}\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi$$

Da beide gegebenen Ladungsverteilungen von ϕ unabhängig sind, kann man auch schreiben

$$q_{lm} = \int \mathrm{dr}\ \mathrm{d}\theta r^{l+2}\rho(r,\theta)\sin\theta \int Y^*_{lm}(\theta,\phi)\mathrm{d}\phi$$

Für $m \neq 0$ sind die Kugelflächenfunktionen aber gegeben durch

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = C(\theta) e^{im\phi}$$

und damit verschwindet das Integral für $m \neq 0$ und für $m = 0$ erhält man nur den Faktor 2π. Insgesamt also

$$q_{l0} = 2\pi \int \mathrm{dr}\ \mathrm{d}\theta r^{l+2} \rho(r, \theta) Y_{l0}^*(\theta) \sin\theta$$

und alle anderen $q_{lm} = 0$. Für $m = 0$ sind die Kugelflächenfunktionen gegeben durch

$$Y_{l0}(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) = Y_{l0}^*(\theta)$$

Außerdem führen wir noch die Substitution $u = \cos\theta, \mathrm{du} = -\sin\theta \mathrm{d}\theta$ durch und erhalten:

$$q_{l0} = -2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int \mathrm{dr}\ \mathrm{du}\ r^{l+2} \rho(r, \theta(u)) P_l(u)$$

(i) Im ersten Fall ist $\rho = \rho_0 = const.$ Wir können also schreiben

$$q_{l0} = -2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^R \mathrm{dr} \int_1^{-1} \mathrm{du}\ r^{l+2} \rho(r, \theta(u)) P_l(u) = 2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \rho_0 \frac{R^{l+3}}{l+3} \int_{-1}^{1} \mathrm{du}\ P_l(u)$$

Im hinteren Schritt wurden die Grenzen vertauscht (deshalb verschwand das Minus). Jetzt benutzen wir noch $1 = P_0$ und

$$\int_{-1}^{1} P_l P_{l'} = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

und erhalten

$$q_{l0} = 2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \rho_0 \frac{R^{l+3}}{l+3} \int_{-1}^{1} \mathrm{du}\ P_l(u) P_0(u) = 2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \rho_0 \frac{R^{l+3}}{l+3} \frac{2}{2l+1} \delta_{l0}$$

Die Deltafunktion ist für $l \neq 0$ Null, also verschwinden alle Terme außer

$$q_{00} = 4\pi\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\rho_0\frac{R^3}{3} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}Q$$

mit der Gesamtladung $Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$.

(ii) Wieder setzen wir das Potential ein und benutzen

$$\sin^2 = 1 - \cos^2 = 1 - u^2 = \frac{2}{3}[P_0(u) - P_2(u)]$$

Damit erhalten wir

$$q_{l0} = \frac{q}{64\pi a^5}2\pi\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int\limits_0^\infty \mathrm{dr}\ r^{l+4}e^{-r/a}\int_{-1}^1 \mathrm{du}\ \frac{2}{3}P_l(u)[P_0(u) - P_2(u)]$$

Also ergeben sich nur für $l = 0$ und $l = 2$ Werte, da sonst der Term $P_l[P_0 - P_2]$ keinen Wert hat. Für $l = 0$ erhält man $\int P_l P_0 = 2\delta_{l0}$ und damit

$$q_{00} = \frac{2q}{48a^5}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int\limits_0^\infty r^4 e^{-r/a}\ \mathrm{dr}$$

Das Integral ergibt (nach mehrfacher partieller Integration)

$$-ae^{-\frac{r}{a}}\left(24a^4 + 24a^3r + 12a^2r^2 + 4ar^3 + r^4\right)|_{r=0}^{r=\infty} = 24a^5$$

und damit der gesamte Term

$$q_{00} = \frac{q}{\sqrt{4\pi}}$$

Für $l = 2$ erhält man $-\int P_l P_2 = -\frac{2}{5}\delta_{l2}$ und dann

$$q_{20} = -\frac{2q}{5 \cdot 48a^5}\frac{5}{\sqrt{4\pi}}\int\limits_0^\infty r^6 e^{-r/a}\ \mathrm{dr}$$

Das Integral ergibt diesmal $720a^5$ und insgesamt

$$q_{20} = \frac{-6q}{\sqrt{4\pi}}$$

Richtige Lösungen ::

$$q_{00} = \frac{q}{2\sqrt{\pi}}$$

$$q_{20} = -3qa^2\sqrt{\frac{5}{\pi}}$$

22. Aufgabe: Dielektrische Kugel

(1) Die Potentialverteilung erfüllt die Laplacegleichung

$$\nabla^2\phi = 0$$

da keine freien Ladungen vorhanden sind (und damit die Ladungsverteilung 0 ist). Dies kommt daher, dass sich in der Kugel und im Raum außen herum keine Ladung befindet (diese befindet sich nur auf der Oberfläche der Kugel). Wir wählen den zylindersymmetrischen Ansatz für das innere ϕ_i und das äußere Potential ϕ_a:

$$\phi_i = \sum_l (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos\theta) \qquad \phi_a = \sum_l (A'_l r^l + B'_l r^{-l-1}) P_l(\cos\theta)$$

Durch Benutzung verschiedener "Randbedingungen" kommt man nun zur Lösung. Wir übertragen immer die Ergebnisse eines Schrittes schon auf den nächsten:

$\phi_i < \infty$ **für** $r < R$ Vor allem auch für $r \to 0$. Deshalb müssen alle $B_l = 0$ sein (weil sonst r^{-l-1} für $r \to 0$ gegen unendlich geht.

$\phi_a \to -kz = -kr\cos\theta$ Dies wissen wir, weil das äußere Feld in großer Entfernung immer noch gleich bleibt. Also sind alle $A'_l = 0$ bis auch das für $l = 1$. Da gilt $A'_1 = -k$.

$\phi_i = \phi_a$ **für** $r = R$ An den Randflächen muss das Potential übereinstimmen, damit die Tangentialkomponente des **E**-Feldes stetig ist. Betrachten wir also $\phi_i - \phi_a$ für $r = R$:

$$\sum_l (A_l R^l - B'_l R^{-l-1}) P_l(\cos\theta) = -kR\cos\theta = -kRP_1(\cos\theta)$$

Diese Differenz muss jetzt Null sein. Da die P_l orthogonal und vollständig sind (wobei hier vor allem die Orthogonalität wichtig ist), reicht es, nur die einzelnen Faktoren **vor** den Legendrepolynomen für jedes l getrennt zu vergleichen. Also für $l \neq 1$

$$A_l R^l - B_l' R^{-l-1} = 0 \implies A_l = B_l' R^{-2l-1}$$

da auf der rechten Seite nur P_1 vorkommt und für $l = 1$

$$A_1 = -k + \frac{B_1'}{R^3}$$

Im Moment haben wir also

$$\phi_i = \frac{B_0'}{R} + \left(-k + \frac{B_1'}{R^3}\right) r\cos\theta + \sum_{l>1} B_l' R^{-2l-1} r^l P_l(\cos\theta)$$

$$\phi_a = \frac{B_0'}{r} + \left(-kr - \frac{B_1'}{r^2}\right)\cos\theta + \sum_{l>1} B_l' r^{-l-1} P_l(\cos\theta)$$

$D_n = D_n$ Die letzte Bedingung betrifft das $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$-Feld. Die Normalkomponente an der Grenzfläche $r = R$ muss stetig sein, also

$$\varepsilon \frac{\partial \phi_i}{\partial r} = \frac{\partial \phi_a}{\partial r}$$

für $r = R$. Leiten wir also ab und setzen $r = R$ ein:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial r} = \left(-k + \frac{B_1'}{R^3}\right)\cos + \sum_{l>1} l B_l' R^{-l-2} P_l(\cos\theta)$$

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial r} = -\frac{B_0'}{R^2} + \left(-k - \frac{2B_1'}{R^3}\right)\cos\theta + \sum_{l>1} B_l' R^{-l-2}(-l-1) P_l(\cos\theta)$$

Wieder nutzen wir den Koeffizientenvergleich mit den Legendrepolynomen: Für $l = 0$ erhalten wir sofort $B_0' = 0$. Für $l \neq 1$ steht dort

$$\varepsilon l B_l' R^{-l-2} = B_l' R^{-l-2}(-l-1)$$

Da εl aber (im Allgemeinen) ungleich $-l-1$ ist, ist die einzige Lösung $B_l' = 0$. Für $l = 1$ erhält man schließlich

$$-k\varepsilon + \frac{B_1'}{R^3}\varepsilon = -k - \frac{2B_1'}{R^3}$$

und damit

$$B_1' = \frac{R^3 k(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2}$$

Unsere Ergebnisse können wir jetzt zusammensetzen und erhalten

$$\phi_i = \left(-k + \frac{k(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2}\right) r\cos\theta = -\frac{3k}{\varepsilon + 2} r\cos\theta = -\frac{3k}{\varepsilon + 2} z$$

$$\phi_a = \left(-kr + \frac{R^3 k(\varepsilon - 1)}{r^2(\varepsilon + 2)}\right)\cos\theta$$

Die Bedingungen werden offensichtlich erfüllt.

(2) Korrektur:
Es gilt

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E} \implies \vec{P} = \left(\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\right)\vec{E}$$

Nun betrachten wir die Felder. Zuerst im Innenraum: Hier ist die Ableitung nach den Koordinaten x udn y offensichtlich 0. Für die z-Komponente erhält man

$$E_z = -\frac{\partial\phi_i}{\partial z} = \frac{3k}{\varepsilon + 2}$$

Also ein konstantes Feld in z-Richtung welches durch das Material verändert wurde (es hat nichtmehr die Stärke k). Insgesamt

$$\mathbf{E}_i = \frac{3k}{\varepsilon + 2}\hat{e}_z$$

Nun zum Feld im Außenraum: Hier betrachten wir jetzt die Ableitung in Kugelkoordinaten. Es ist

$$-\frac{\partial\phi_a}{\partial r} = k\left(1 + \frac{2R^3(\varepsilon - 1)}{r^3(2 + \varepsilon)}\right)\cos\theta$$

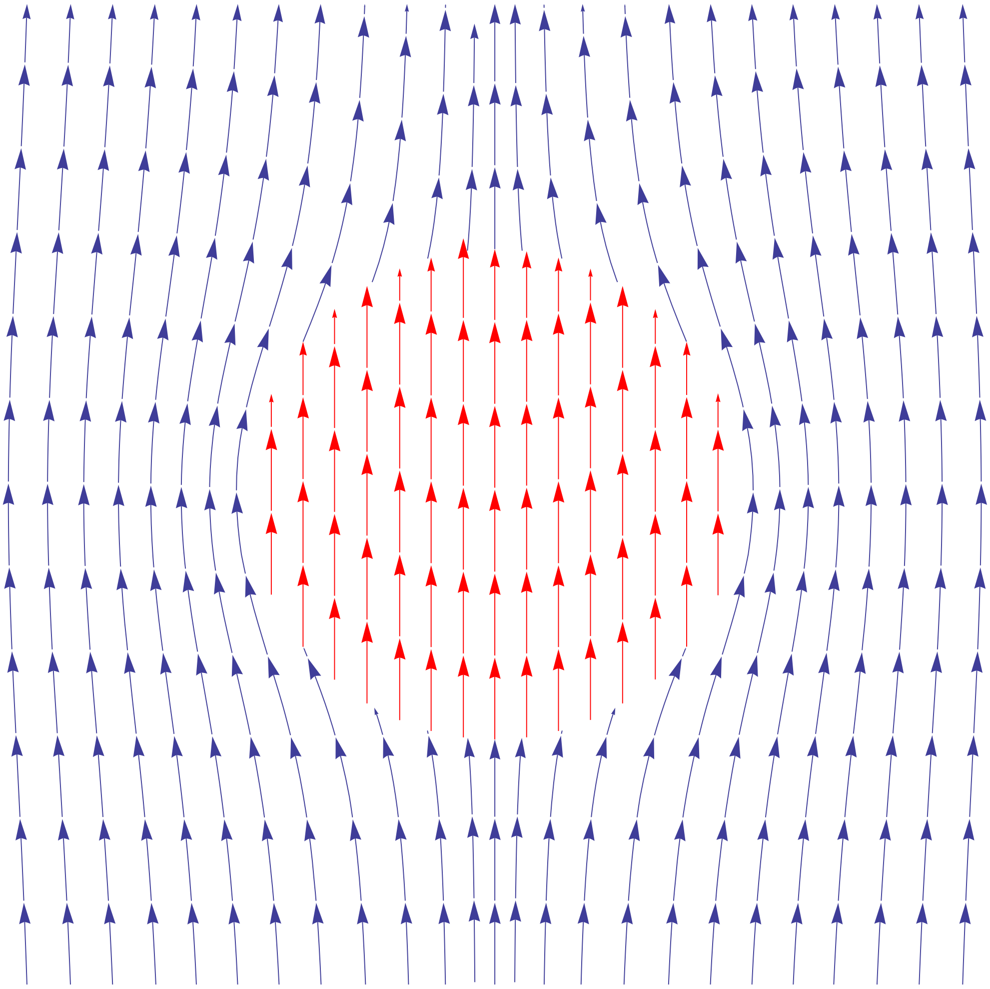
$$-\frac{\partial\phi_a}{\partial\theta} = k\left(-r + \frac{R^3(\varepsilon - 1)}{r^2(2 + \varepsilon)}\right)\sin\theta$$

Also

$$\mathbf{E}_a = -\nabla\phi_a = -\frac{\partial\phi_a}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi_a}{\partial\theta}\hat{e}_\theta$$

$$= k\left(1 + \frac{2R^3(\varepsilon - 1)}{r^3(2 + \varepsilon)}\right)\cos\theta\hat{e}_r + k\left(-1 + \frac{R^3(\varepsilon - 1)}{r^3(2 + \varepsilon)}\right)\sin\theta\hat{e}_\theta$$

Diese Felder wollen wir uns jetzt vorstellen:



Das äußere Feld scheint der Kugel "auszuweichen". Im Inneren wird das ehemalige Feld (zumindes in der Richtung) erhalten. Erklären lässt sich dies durch die Polarisationsladungen im Inneren. Für die Polarisationsflächenladung betrachten wir wieder das **E**-Feld in r-Richtung an der Grenzfläche und teilen durch 4π, also

$$\sigma = \frac{k}{4\pi}\left(1 + \frac{2(\varepsilon - 1)}{(2+\varepsilon)}\right)\cos\theta = \frac{k}{4\pi}\frac{2\varepsilon}{2+\varepsilon}\cos\theta$$

Für die Polarisation folgt aus

$$\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}_i = (\varepsilon - 1)\mathbf{E}_i$$

dann

$$\mathbf{P} = \frac{3k(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2}$$

Betrachtet man jetzt noch das Potential außen, so findet man im hinteren Term das Dipolpotential schon versteckt (es steht schließlich r^2 im Nenner). Man erkennt

$$\mathbf{p} = \frac{R^3 k(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2}\hat{e}_z$$

erfüllt gerade

$$\phi_a = -kz + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

und somit ist **p** das Dipolmoment.

23. Aufgabe: Stromdurchflossener Kreisring

(i) Wir betrachten ein infinitisimal kleines Stückchen des Kreisrings **l** und den Betrachtungspunkt **a** an den Koordinaten

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

Das Kreisstück wird also durch θ parametrisiert mit

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Verbindungsstrecke zwischen **a** und **l** ist gegeben durch

$$\mathbf{a} - \mathbf{l} = \begin{pmatrix} -R\cos\theta \\ -R\sin\theta \\ a \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{a} - \mathbf{l}|^2 = R^2 + a^2 \qquad \partial\mathbf{l} \times (\mathbf{a} - \mathbf{l}) = \begin{pmatrix} aR\cos\theta \\ aR\sin\theta \\ R^2 \end{pmatrix} \partial\theta$$

Wenden wir nun das Biot-Savartsche Gesetz an, so erhalten wir

$$\mathbf{B}(\mathbf{a}) = \frac{I}{c} \oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{l} \times (\mathbf{a} - \mathbf{l})}{\|\mathbf{a} - \mathbf{l}\|^3} = \frac{I}{c} \frac{1}{(R^2 + a^2)^{(3/2)}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} aR\cos\theta \\ aR\sin\theta \\ R^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta$$

Das Integral über eine Periode des Sinus sowie des Cosinus ist gerade 0 (was aus Symmetriegründen sowieso klar war). In der z-Komponente kommt nur ein linearer Term hinzu, der mit den Grenzen zu 2π wird. Man erhält also

$$B(\mathbf{a})_z = 2\pi \frac{I}{c} \frac{R^2}{(R^2 + a^2)^{(3/2)}}$$

und für die anderen Komponenten 0.

Für $a \gg R$ Wir stellen um

$$B(\mathbf{a})_z = 2\pi \frac{I}{c} \frac{R^2}{(R^2 + a^2)^{(3/2)}} = 2\pi \frac{I}{c} \frac{R^2}{a^3} \frac{1}{\left(\frac{R^2}{a^2} + 1\right)^{(3/2)}}$$

Wir benutzen die Taylorreihenentwicklung von

$$(x^2 + 1)^{-3/2} \approx 1 - 3x^2 + \ldots$$

und für $x = R/a$ sehr klein sogar

$$(x^2 + 1)^{-3/2} \approx 1$$

Insgesamt ist die Näherung

$$B(\mathbf{a})_z \approx 2\pi \frac{I}{c} \frac{R^2}{a^3} = \frac{2}{c} \frac{m}{a^3} \qquad m = \pi R^2 I$$

was der eines Dipols gleichkommt.

Für $R \gg a$ Wir verfahren analog und stellen wieder um

$$B(\mathbf{a})_z = 2\pi \frac{I}{c} \frac{R^2}{(R^2 + a^2)^{(3/2)}} = 2\pi \frac{I}{c} \frac{1}{R} \frac{1}{\left(\frac{a^2}{R^2} + 1\right)^{(3/2)}} \approx \frac{2\pi I}{Rc}$$

(ii) In der vorigen Aufgabe wurde das **B**-Feld eines Kreisringes in z-Richtung berechnet. Hat eine ganze Spule (mit vernachlässigbarer Höhe) jetzt N Windungen, so ist das erzeugte Feld gerade

$$B(z)_z = N2\pi \frac{I}{c} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{(3/2)}}$$

Die beiden Felder der beiden Spulen addieren sich. Am Punkt $z=0$ hat die eine Spule mit $I=I$ einen Abstand von $z=a$ und die andere Spule mit $I=-8I$ einen Abstand von $z=3a$. Wenn das Feld also verschwinden soll, muss gelten

$$B(a) - 8B(3a) = 0 \implies \frac{1}{(R^2+a^2)^{(3/2)}} = \frac{8}{(R^2+9a^2)^{(3/2)}}$$

Wird die ganze Gleichung mit 2/3 potenziert und umgestellt, so erhält man

$$R^2 + 9a^2 = 4R^2 + 4a^2$$

also

$$a = \pm R\sqrt{\frac{3}{5}}$$

8. Übung

24. Aufgabe: Wasserstoffatom nach Thomson

(a)

$$\int \vec{E} \mathrm{d}\vec{A} = 4\pi \int \rho \mathrm{dV}$$

mit

$$e = \rho V = \frac{3e}{4\pi R^3}$$

Somit

$$E_r = \frac{er}{R^3}$$

Wegen Kugelsymmetrie

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r = \frac{e}{R^3}\vec{r}$$

Und somit

$$\vec{F} = q\vec{E} \implies \vec{F} = -e\vec{E}$$

(b) $\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}, \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \exp(i\omega t)$ Einsetzen in $\vec{F} = -e \cdot \vec{E}$ ergibt

$$\omega^2 = \frac{e^2}{mR^3}$$

und somit

$$R = \sqrt[3]{\left(\frac{e}{f2\pi}\right)^2 \frac{1}{m}}$$

25. Aufgabe: Ladungen über geerdeter Fläche

Spiegelladungen von q als $-q$ bei $-d\vec{e}_z$ und von $-Q$ als Q bei $-2d\vec{e}_z$.
Kraft auf Ladung q ergibt

$$\vec{F} = \vec{e}_z \left(\frac{Q}{d^2} - \frac{q}{4d^2} + \frac{Q}{9d^2}\right) \overset{!}{=} 0$$

Und somit

$$Q = \frac{9}{40}$$

26. Aufgabe: Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten

(a) Ansatz

$$\phi = R(\rho) \cdot Q(\varphi)$$

Somit

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho}\left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Dies ergibt

$$\frac{\rho}{R(\rho)}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial \rho}\right) = n^2$$
$$\frac{1}{Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi} = -n^2$$

Mit $Q(\varphi) = Q(\varphi + 2\pi)$ folgt $n \in \mathbb{N}_0$.
Falls $n \neq 0$ $Q(\varphi) = Q(\varphi) = c_n \cos(n\varphi) + d_n \sin(n\varphi)$
$n = 0$ $Q(\varphi) = c_0 + \underbrace{d_0\varphi}_{\text{Fällt weg wegen Periodizitätsbedingung}}$

$n \neq 0$ $R(\rho) = a_n \rho^n + b_n \rho^{-n}$
$n = 0$ $R(\rho) = a_0 + b_0 \ln(\rho)$
Also

$$\phi = a_0 \ln(\rho) + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \rho^n \left(c_n \cos(n\varphi) + d_n \sin(n\varphi)\right)$$

(b) es gilt

$$\lim_{\rho\to\infty} \|\phi + E_0 x\| = \lim_{\rho\to\infty} \|\phi + E_0 \rho \cos(\varphi)$$

Somit

$$c_1 = -E_0 \qquad c_i = 0 \text{ sonst}$$

Da der Zylinder ungeladen ist, gilt

$$a_0 = 0$$

Tangentialkomponente an Zylinderoberfläche muss verschwinden.

$$\frac{\partial\phi}{\partial\phi}|_{\rho=a} \stackrel{!}{=} 0 = E_0 a \sin\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} \left(-nc_n \cos(n\varphi) - nd_n \sin(n\varphi)\right)$$

Also

$$-E_0 a \sin\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} \left(-nc_{-n} \cos(n\varphi) - nd_{-n} \sin(n\varphi)\right)$$

somit

$$d_{-1} = a^2 E_0, c_{-n} = d_{-n} = 0$$

Also

$$\phi = -E_0 \cos(\varphi) \left(\rho - \frac{a^2}{\rho}\right)$$

9. Übung

ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK III
(THEORIE C, ELEKTRODYNAMIK), WS 2011/12 BLATT 7

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 12. 12. 11
Besprechung: 14. 12. 11

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Matthias Weinreuter	☐ Gruppe 2 Juraj Streicher	☐ Gruppe 3 Philip Wollfarth	☐ Gruppe 4 Ulf Briskot
☐ Gruppe 5 Valentin Bolsinger	☐ Gruppe 6 Robin Roth	☐ Gruppe 7 Julian Stöckel	☐ Gruppe 8 Stefan Miereis
☐ Gruppe 9 Philipp Rudo	☐ Gruppe 10 Marius Bürkle	☐ Gruppe 11 Guillaume Chalons	☐ Gruppe 12 Justus Zorn
☐ Gruppe 13 Yasmin Anstruther			

*

Aufgabe 1: Leiter mit Bohrung 3

Ein zylindrischer gerader Leiter mit Radius a hat parallel zu seiner Symmetrieachse eine kreisförmige Bohrung vom Radius b, deren Mittelachse im Abstand d von der Symmetrieachse des Zylinders liegt (es gilt $a > d + b$). Die Stromdichte $\vec{j}$ im verbleibenden Material ist homogen und parallel zur Zylinderachse gerichtet. Bestimmen Sie die magnetische Flussdichte innerhalb der Bohrung und drücken Sie diese durch den gesamten Strom I aus.

Aufgabe 2: Rotierende Ladungsverteilung 4

i) Ein Zylinder mit Radius a und Höhe h trage die Ladung Q (gleichmäßig auf der Oberfläche des Zylindermantels verteilt) und rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um seine Achse. Bestimmen Sie die dadurch erzeugte Stromdichte und das magnetische Moment. *2P*

*29. November 2011 17:17 Uhr

(bitte wenden)

ii) Wie i), diesmal für eine rotierende Kugel mit Radius R und gleichmäßig auf der Kugeloberfläche verteilter Ladung Q. *2P*

Aufgabe 3: Vektorpotential 2

Gegeben sei das Vektorpotential einer Spule mit Radius a,

innen: $x^2 + y^2 < a^2 \,, \quad \vec{A} = b(-y, 0, 0) \,,$

außen: $x^2 + y^2 > a^2 \,, \quad \vec{A} = b\frac{a^2}{2(x^2 + y^2)}(-y, x, 0) - \frac{b}{2}(y, x, 0) \,,$

(wobei b eine Konstante ist). Berechnen Sie $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Geben Sie Eichfunktionen χ_1 und χ_2 an, die das Vektorpotential innen auf die Form $\vec{A}_1 = (b/2)(-y, x, 0)$ bzw. $\vec{A}_2 = b(x - y, 0, 0)$ bringen. Wie lauten $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$ außerhalb der Spule? Welche Vektorpotentiale erfüllen die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$?

Aufgabe 4: Magnetisierter Zylinder 3

Ein langer Zylinder mit Radius R und Längsachse entlang der z-Achse habe eine Magnetisierung $\vec{M} = m\rho^2\vec{e}_\varphi$, wobei m eine Konstante, ρ der Abstand von der z-Achse und $\vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$ ist.
Finden Sie den Magnetisierungsstrom.
Finden Sie die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ sowie das (makroskopische) magnetische Feld $\vec{H}$ innerhalb und außerhalb des Zylinders.

27. Aufgabe: Leiter mit Bohrung

Die Stromdichte ist im ganzen Zylinder konstant $\mathbf{j} = j_0 \hat{e}_z$. Statt den ausgebohrten Zylinder zu betrachten, können wir uns auch einen Zylinder ohne Bohrung mit gleicher Stromdichte $\mathbf{j}$ vorstellen und additiv die Bohrung mit entgegengesetzter Stromdichte. An den Stellen ohne Bohrung bleibt die Stromdichte dann gleich und in der Bohrung hebt sie sich gerade auf (was einem materialfreien Raum entspricht!). Betrachten wir jetzt das Amperesche Durchflutungsgesetz an einer beliebigen Stelle auf einem Kreis mit Radius r um die Mittelachse für den ganzen Zylinder mit Stromdichte $\mathbf{j}$:

$$\int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4\pi j_0 \pi r^2}{c}$$

Aus Symmetriegründen muss das $\mathbf{B}$-Feld für einen vollständigen Zylinder natürlich auf einem Kreis mit Radius r um die Mittelachse überall gleich sein, also gilt

$$\int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = B_\phi 2\pi r \implies B_\phi = \frac{2 j_0 \pi r}{c}$$

wobei mit B_ϕ die Tangentialkomponente des Feldes gemeint ist. Alle anderen Komponenten fallen aufgrund der Symmetrie weg. Nun gilt also

$$\mathbf{B} = \frac{2 j_0 \pi r}{c} \hat{e}_\phi = \frac{2 j_0 \pi r}{c} (\hat{e}_z \times \hat{e}_r) = \frac{2 j_0 \pi}{c} (\hat{e}_z \times \mathbf{r})$$

in Zylinderkoordinaten. Betrachten wir jetzt den ausgebohrten Zylinder an einer Stelle $\mathbf{x}$ so gilt also für die magnetische Flussdichte

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_{\text{ganz}} - \mathbf{B}_{\text{Bohrung}}$$

Die magnetische Flussdichte für den ganzen Zylinder haben wir schon berechnet

$$\mathbf{B}_{\text{ganz}}(\mathbf{x}) = \frac{2 j_0 \pi}{c} (\hat{e}_z \times \mathbf{r})$$

Sie die Bohrung jetzt d auf der x-Achse vom Mittelpunkt entfernt. Dann können wir die magnetische Flussdichte des Bohrungszylinders schreiben als

$$\mathbf{B}_{\text{Bohrung}}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_{\text{ganz}}(\mathbf{x}) = \frac{2 j_0 \pi}{c} (\hat{e}_z \times (\mathbf{r} - d\hat{e}_x))$$

weil die Bohrung in unserem Sinne auch ein ganz normaler Zylinder ist, dessen Mittelpunkt einfach verschoben ist. Es ergibt sich also insgesamt

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{2j_0\pi}{c}(\hat{e}_z \times \mathbf{r}) - \frac{2j_0\pi}{c}(\hat{e}_z \times (\mathbf{r} - d\hat{e}_x)) = \frac{2j_0\pi}{c}(\hat{e}_z \times d\hat{e}_x) = \frac{2j_0\pi d}{c}\hat{e}_y$$

also in der ganzen Bohrung konstant! Da der Gesamtstrom gegeben ist durch Stromdichte mal Grundfläche, kann man schreiben

$$I = j_0(\pi a^2 - \pi b^2) \implies \mathbf{B} = \frac{2Id}{c(a^2 - b^2)}\hat{e}_y$$

28. Aufgabe: Rotierende Ladungsverteilung

Wir betrachten zuerst die Kugel!

(a) Die Kugel hat insgesamt die Ladung Q und die Oberfläche $4\pi R^2$. Da die Ladungsverteilung homogen ist, ist die Flächenladungsdichte σ gegeben durch

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r - R)$$

Die Deltafunktion sorgt dafür, dass die Ladung wirklich nur auf der Oberfläche sitzt. Die Stromdichte ist dann an einem beliebigen Punkt $\mathbf{x}$ gegeben durch

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \sigma\dot{\mathbf{x}}$$

Betrachten wir jetzt den Punkt mit Kugelkoordinaten

$$\mathbf{x} = r\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

So ist seine Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ gegeben durch (wenn ω die Winkelgeschwindigkeit der Kugel ist)

$$\dot{\mathbf{x}} = r\omega\begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ 0\end{pmatrix} = r\omega\sin\theta\hat{e}_\phi$$

Die Stromdichte beträgt also

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \sigma\omega r \sin\theta\delta(r-R)\hat{e}_\phi = \frac{Q}{4\pi R^2} r\omega \sin\theta\delta(r-R) \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das magnetische Moment ist gegeben durch

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\int_V \mathrm{d}^3\mathrm{x}\ \mathbf{x}\times\mathbf{j}(\mathbf{x})$$

Der Vektor $\mathbf{x}$ lässt sich mit Kugelkoordinaten schreiben als

$$\mathbf{x} = r\hat{e}_r$$

Außerdem ist

$$\hat{e}_r \times \hat{e}_\phi = -\hat{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\cos\theta\cos\phi \\ -\cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Integriert man die ersten beiden Komponenten für $\phi = 1\dots 2\pi$ so fallen sie gerade weg. Für die dritte Komponente gilt:

$$m_z = \frac{Q\omega}{8\pi Rc}\int \sin^3\theta r^4\delta(r-R)\ \mathrm{dr}\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi$$

wobei die r^2 durch die Integration in Kugelkoordinaten und jeweils ein r vom Vektor $\mathbf{x}$ und von der Stromdichte kommt und jeweils ein $\sin\theta$ vom Vorfaktor der Stromdichte, vom Kreuzprodukt und von der Integration in Kugelkoordinaten kommt. Man erhält aufgrund der Deltadistribution

$$= \frac{Q\omega R^2}{8\pi c}\int \sin^3\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi = \frac{Q\omega R^2}{4c}\int \sin^3\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{1}{c}\frac{Q}{4\pi R^2}R^4\omega\pi\frac{4}{3} = \frac{4\pi}{3c}\omega\sigma R^4$$

in z-Richtung.

(b) Für den Zylinder läuft das ganze sehr analog ab. Diesmal haben wir die Fläche $F = 2\pi ah$ und damit die Flächenladung

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi ah}\delta(\rho - a)$$

Wir betrachten diesmal $\mathbf{x}$ in Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \implies \dot{\mathbf{x}} = \rho\omega \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \rho\omega\hat{e}_\phi$$

mit den Definitionen von oben.Die Stromdichte ist also gegeben durch

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \sigma\rho\omega\delta(\rho - a)\hat{e}_\phi$$

und das magnetische Moment durch

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\int \mathrm{d}^3\mathrm{x}\ \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2c}\sigma\omega\int \rho^2\, \underbrace{\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\phi}_{\hat{e}_z}\, \delta(\rho - a)\rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{dz}$$

und insgesamt

$$\mathbf{m} = \frac{a^3}{2c}\omega\sigma\ 2\pi h\ \hat{e}_z = \frac{Qa^2\omega}{2c}\hat{e}_z$$

29. Aufgabe: Vektorpotential

Es gilt

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Also

$$\mathbf{B}_i = b\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b\hat{e}_z$$

$$\mathbf{B}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(für letzteres siehe auch erstes Übungsblatt). Setze jetzt $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_i + \nabla\chi_1$ und $\mathbf{A}_2$ analog. Damit die Beziehungen auf dem Übungsblatt erfüllt sind, muss gelten:

$$\nabla\chi_1 = \frac{b}{2}\begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\chi_1}{\partial x} = \frac{by}{2} \qquad \frac{\partial\chi_1}{\partial y} = \frac{bx}{2}$$

Also kommt für χ_1 nur $\chi_1 = xy + c$ und eine Konstante c in Frage. Für das äußere Feld gilt dann

$$\mathbf{A}_{1a} = \mathbf{A}_a + \nabla\chi_1 = \frac{a^2 b}{2\left(x^2+y^2\right)}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analog für den zweiten Fall muss gelten

$$\nabla\chi_2 = b\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\chi_1}{\partial x} = bx \qquad \frac{\partial\chi_1}{\partial y} = 0$$

Diesmal muss $\chi_2 = \frac{b}{2}x^2 + c$ gelten. Es ist dann

$$\mathbf{A}_{2a} = \mathbf{A}_a + \nabla\chi_2 = \frac{ba^2}{2(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{b}{2}\begin{pmatrix} 2x-y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die gegebenen Potentiale $\mathbf{A}_i$ und $\mathbf{A}_a$ erfüllen offensichtlich die Coulomb-Eichung (da x nach y abgeleitet natürlich 0 ergibt und umgekehrt). Da auch $\nabla\chi_1$ aus dieser Begründung quellfrei ist (die Divergenz also verschwindet), muss auch die Divergenz von $\mathbf{A}_{1i}$ und $\mathbf{A}_{1a}$ verschwinden. Die Divergenz von $\nabla\chi_2$ ist jedoch b, deshalb gilt

$$\nabla\cdot\mathbf{A}_{2i} = \nabla\cdot\mathbf{A}_{2a} = b \neq 0$$

30. Aufgabe: Magnetisierter Zylinder

Die Stromdichte $\mathbf{j}_m$ des Magnetisierungsstroms ist definiert über

$$\mathbf{j}_m = c\nabla\times\mathbf{M} = c(\nabla\times m\rho^2\hat{e}_\phi)$$

Betrachtet man den Rotationsoperator in Zylinderkoordinaten, dann fallen alle Terme außer M_ϕ weg. Das bedeutet

$$\nabla\times\mathbf{M} = \left(\frac{\partial M_\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}M_\phi\right)\hat{e}_z = 3m\rho\hat{e}_z$$

und dann für die Stromdichte

$$\mathbf{j}_m = 3cm\rho\hat{e}_z$$

Der Gesamtstrom durch einen Querschnitt des Zylinders wäre dann

$$I = \int \mathbf{j}_m \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 3cm \int \rho\rho \; \mathrm{d}\rho \; \mathrm{d}\phi = 2\pi cmR^3$$

Felder außen Wir benutzen das Amperesche Durchflutungsgesetz mit

$$\int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I = 2\pi \cdot 4\pi mR^3$$

Aus Symmetriegründen existiert das **B**-Feld nur in der ϕ-Komponente und es gilt dafür

$$\int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = B_\phi \cdot 2\pi r$$

wenn wir uns im Abstand r zum Zentrum befinden. Es gilt also

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi mR^3}{r}\hat{e}_\phi$$

Dies entspricht auch dem **H**-Feld, da im Äußeren keine Magnetisierung vorhanden ist.

Felder innen

$$I = \int \mathbf{j} \; \mathrm{d}\mathbf{A} = 2c\rho^3 m\pi$$

$$\int \mathbf{B} \; \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I = 8\pi^2\rho^3 m$$

$$\int \mathbf{B} \; \mathrm{d}\mathbf{l} = B_\phi 2\pi\rho$$

$$\implies B_\phi = 4\pi\rho^2 m$$

$$\mathbf{B} = 4\pi\rho^2 m\hat{e}_\phi$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} = 0$$

10. Übung

ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK III
(THEORIE C, ELEKTRODYNAMIK), WS 2011/12 — BLATT 8

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 19. 12. 11
Besprechung: 21. 12. 11

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Matthias Weinreuter	☐ Gruppe 2 Juraj Streicher	☐ Gruppe 3 Philip Wollfarth	☐ Gruppe 4 Ulf Briskot
☐ Gruppe 5 Valentin Bolsinger	☐ Gruppe 6 Robin Roth	☐ Gruppe 7 Julian Stöckel	☐ Gruppe 8 Stefan Miereis
☐ Gruppe 9 Philipp Rudo	☐ Gruppe 10 Marius Bürkle	☐ Gruppe 11 Guillaume Chalons	☐ Gruppe 12 Justus Zorn
☐ Gruppe 13 Yasmin Anstruther			

*

Aufgabe 1: Draht im Hohlzylinder — 6

Ein unendlich langer, gerader Draht mit kreisförmigem Querschnitt (Radius a), Leitfähigkeit σ, Dielektrizitätskonstante ϵ und Permeabilität μ wird von einem homogenen Strom I durchflossen. Die Rückleitung des Stroms erfolgt durch einen koaxialen Hohlzylinder mit innerem Radius $b > a$ und äußerem Radius $c \to \infty$ (sowie ebenfalls Leitfähigkeit σ, Dielektrizitätskonstante ϵ und Permeabilität μ).

i) Berechnen Sie die Felder $\vec{B}$ und $\vec{H}$ im Draht, im Zylinder und im Zwischenraum. *1P*

ii) Geben Sie das elektrische Feld im Draht und im Zylinder an. Berechnen Sie das elektrostatische Potential und das elektrische Feld im Zwischenraum (Hinweis: Ansatz $\Phi(\vec{r}) = z f(\rho)$, wenn der Draht in z-Richtung zeigt). *2P*

iii) Welche Oberflächenladung befindet sich auf dem Draht? Wie groß ist die Spannung zwischen Drahtoberfläche und (innerer) Zylinderoberfläche? Wie groß ist *1P*

* 6. Dezember 2011 19:04 Uhr

(bitte wenden)

die Kapazität pro Längeneinheit des von Draht und Rückleiter gebildeten Zylinderkondensators?

iv) Bestimmen Sie den Energiefluss im Zwischenraum und im Inneren des Drahtes, insbesondere die Energie, die pro Längeneinheit durch die Oberfläche ins Drahtinnere fließt. *2P*

Aufgabe 2: Elektron in elektromagnetischer Welle 4

Auf ein anfänglich (zur Zeit $t \to -\infty$) ruhendes Elektron fällt eine elektromagnetische Welle, die durch die Potentiale

$$\vec{A} = (0, A(x - ct), 0)\,, \quad \Phi = 0\,,$$

mit einer beliebigen, für $|s| \to \infty$ verschwindenden Funktion $A(s)$ (wobei kartesische Koordinaten $\vec{r} = (x, y, z)$ benützt werden).

i) Überprüfen Sie die Coulomb-Eichbedingung und die Wellengleichung, und berechnen Sie die Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$. *1P*

ii) Stellen Sie die (nichtrelativistischen) Bewegungsgleichungen für die Ortskoordinaten $\vec{r}(t)$ auf. Integrieren Sie diese so weit wie möglich und zeigen Sie, dass das Elektron nach der Bestrahlung (d.h. zur Zeit $t \to +\infty$) wieder in Ruhe, aber gegen seine ursprüngliche Position um $\delta\vec{r} = (a, b, 0)$ mit $a > 0$ verschoben ist. *3P*

Aufgabe 3: Ebene elektromagnetische Welle 2

Bestimmen Sie das (reelle) elektrische und magnetische Feld einer ebenen elektrischen Welle im Vakuum mit Amplitude a, Frequenz ω und Phasenwinkel Null, die

i) sich in die negative y-Richtung bewegt und in x-Richtung polarisiert ist, *1P*

ii) sich in die Richtung des Ortsvektors $(1, 1, 1)$ bewegt und parallel zur x-y-Ebene polarisiert ist. *1P*

31. Aufgabe: Draht im Hohlzylinder

(Bitte nicht das c des Radius mit der Lichtgeschwindigkeit verwechseln! Eigentlich keine gute Wahl der Konstanten...)

(a) Wir berechnen zuerst das H-Feld für die drei Fälle. Aus Symmetriegründen besitzt es nur einen Wert in ϕ-Richtung. Alle anderen Komponenten (r und z) sind Null. Also

Innen Betrachten wir einen Kreis mit Radius r, so umschließt dieser einen Strom von

$$I_r = I\frac{\pi r^2}{\pi a^2} = I\frac{r^2}{a^2}$$

Aus dem Ampereschen Durchflutungsgesetzt folgt also

$$\int \mathbf{H}\ \mathrm{dl} = \frac{4\pi}{c}I_r \implies H_\phi = \frac{4\pi}{c}I\frac{r^2}{a^2}\frac{1}{2\pi r} = \frac{2Ir}{ca^2}$$

Luftschicht Hier wird jetzt - egal wie groß der Radius ist - immer nur der gesamte Strom aus dem inneren Zylinder eingeschlossen. Also

$$H_\phi = \frac{4\pi}{c}I\frac{1}{2\pi r} = \frac{2I}{cr}$$

Außen Zu den eingeschlossenen Strom in inneren Zylinder (I) kommt jetzt ein negativer Teil I'_r, mit

$$\frac{I'_r}{I} = \frac{\pi(r^2 - b^2)}{\pi(c^2 - b^2)}$$

Insgesamt also ein H_ϕ von

$$H_\phi = \frac{2I}{cr}\left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)$$

Die Stetigkeitsbedingungen sind offensichtlich erfüllt. Nun zum **B**-Feld. Dieses besitzt natürlich auch immer nur eine Komponente in ϕ-Richtung. Diese ist gegeben durch:

Innen und Außen Es ist

$$B_\phi = \mu H_\phi$$

Luftspalt Hier gibt es kein umgebendes Material, deshalb ist

$$B_\phi = H_\phi$$

Auch hier sind die Stetigkeitsbedingungen trivialerweise erfüllt (kein Feld in Normalenrichtung).

(b) In einem Leiter gilt

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

Betrachten wir die drei Fälle

Im inneren Draht also für $\rho < a$ ist dies gerade

$$\mathbf{E}_1 = \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \hat{e}_z$$

Im äußeren Hohlzylinder für $c > \rho > b$ gilt

$$\mathbf{E}_3 = -\frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \hat{e}_z$$

und für den Grenzfall $c \to \infty$ geht dies gegen Null:

$$\mathbf{E}_3 = 0$$

Im Zwischenraum war der Ansatz

$$\Phi = z \cdot f(\rho)$$

gegeben. Da keine Ladung vorhanden ist, muss auch gelten

$$\Delta \Phi = 0$$

Dies führt (mit dem Laplace-Operaor in Zylinderkoordinaten) auf

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right) \Phi = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) f(\rho) = 0 \implies f(\rho) = A \ln \rho + B$$

Betrachten wir jetzt die Grenzflächen, so muss die Tangentialkomponente des **E**-Feldes stetig sein. Insbesondere also auch die z-Komponente. Es ist also

- für $\rho = a$
$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\Phi = -f(a) = \frac{I}{\pi a^2 \sigma}$$
- für $\rho = b$
$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\Phi = -f(b) = 0 \implies \Phi = \frac{I}{\pi a^2 \sigma}\frac{\ln\frac{\rho}{b}}{\ln\frac{b}{a}}$$

Diese Ergebnisse liefern die fehlenden Koeffizienten für f:

$$A = \frac{I}{\pi a^2 \sigma \ln\frac{b}{a}} \qquad B = -\frac{I\ln b}{\pi a^2 \sigma \ln\frac{b}{a}}$$

Damit lässt sich auch das **E**-Feld im Zwischenraum angeben:

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla\Phi = \left(-\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{e}_\rho - \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z\right)\Phi = -\frac{I}{\pi a^2\sigma\ln\frac{b}{a}}\left(\frac{z}{\rho}\hat{e}_\rho + \ln\frac{\rho}{b}\hat{e}_z\right)$$

(c) Das **D**-Feld besitzt an der Grenzfläche in Normalkomponente gerade eine Unstetigkeit, die die Größe der Oberflächenladung σ_f angibt. Es ist nämlich

$$\sigma_f = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{D_2} - \mathbf{D_1})\hat{n}_\rho$$

Das innere Feld $\mathbf{E}_1$ besitzt keine Normalenkomponente, weshalb auch das $\mathbf{D}_1$-Feld keine Normalenkomponente besitzt:

$$\mathbf{D_1} = 0$$

Im äußeren (Zwischen)-Feld befindet sich keine Materie, weshalb hier gilt

$$\mathbf{E_2} = \mathbf{D_2}$$

Also können wir schreiben

$$\sigma_f = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}_{2_\rho}$$

und an der Stelle $\rho = a$

$$\sigma_f = -\frac{Iz}{4\pi^2 a^3 \sigma \ln\frac{b}{a}}$$

mit der Beziehung vom Aufgabenteil davor.

(d) Hier benutzen wir einfach den Poynting-Vektor:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Für $\rho < a$ zeigt das $\mathbf{E}_1$-Feld nur in z-Richtung und das $\mathbf{H}_1$-Feld nur in ϕ-Richtung. Es ist also

$$\mathbf{S} = -\frac{c}{4\pi} E_z H_\phi \hat{e}_\rho = -\frac{I^2 \rho}{2\pi^2 a^4 \sigma}\hat{e}_\rho$$

Für $a < \rho < b$ Das $\mathbf{E}_2$-Feld hat jetzt Komponenten in ρ- und z-Richtung; das $\mathbf{H}_2$-Feld zeigt wieder nur in ϕ-Richtung.

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(E_\rho H_\phi \hat{e}_z - E_z H_\phi \hat{e}_\rho) = -\frac{I^2}{2\pi^2 a^2 \sigma \ln \frac{b}{a} \rho}\left(\frac{z}{\rho}\hat{e}_z - \ln \frac{\rho}{b}\hat{e}_z\right)$$

Die Energie pro Längeneinheit ist dann

$$\frac{1}{L}\int \mathbf{S}\ \mathrm{df} = -2\pi\rho S_\rho$$

und damit an der Stelle $\rho = a$

$$= \frac{I^2}{\pi\sigma a^2} = \frac{I^2 R}{L}$$

mit der Definition

$$R = \frac{L}{\pi a^2 \sigma}$$

32. Aufgabe: Elektron in elektromagnetischer Welle

(a) **Coulomb-Eichung:** Es muss gelten

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Es ist aber

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial A(x-ct)}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 0$$

und damit die Eichung erfüllt.

Wellengleichung Mit dem gegebenen $\mathbf{A}$ soll gelten:

$$\Box\mathbf{A} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} = 0$$

Da x und z-Komponente ergibt trivialerweise 0. Für die y-Komponente gilt:

$$\nabla^2 A_y = \frac{\partial^2 A(x-ct)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A(x-ct)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A(x-ct)}{\partial z^2} = A''(x-ct)$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = (-c)^2 A''(x-ct) = c^2 A''(x-ct)$$

Und damit die Wellengleichung.

Felder In diesem Spezialfall ergeben die Maxwellschen Gleichungen:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{-c}{c}A'(x-ct)\hat{e}_y = A'(x-ct)\hat{e}_y$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A'(x-ct) \end{pmatrix} = A'(x-ct)\hat{e}_z$$

(b) Wir benutzen die Lorentzkraft:

$$\mathbf{F}_L = e(\mathbf{E} + \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c} \times \mathbf{B})$$

Es ist

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times A'(x-ct)\hat{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{y}A'(x-ct) \\ -\dot{x}A'(x-ct) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{F}_L = \frac{e}{c}\begin{pmatrix} \dot{y}A'(x-ct) \\ cA'(x-ct) - \dot{x}A'(x-ct) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Kraft setzen wir jetzt mit der Newtonschen Kraft gleich und erhalten

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_L$$

und damit die drei Gleichungen

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{cm} \begin{pmatrix} \dot{y}A' \\ cA' - \dot{x}A' \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei die Abkürzung

$$A' = A'(x - ct)$$

gewählt wurde. Die dritte Gleichung ergibt einfach $\ddot{z} = 0$ und da das Elektron am Anfang im Nullpunkt in Ruhe war, ist

$$z = 0$$

Integrieren wir die Gleichung für $\ddot{y}$:

$$\ddot{y} = \frac{e}{cm} A'(x - ct)(c - \dot{x}) \implies \dot{y} = -\frac{e}{cm} A(x - ct) + C$$

mit einer Konstanten C, da die totale Ableitung von $x - ct$ nach der Zeit gerade $(\dot{x} - c) = -(c - \dot{x})$ ergibt. Für $t \to -\infty$ geht $|x - ct| \to \infty$ (Anmerkung: Hier wissen wir noch nicht, ob nicht auch x gegen unendlich geht. Aber wir können den Grenzwert für $t \to -\infty$ immer so wählen, dass $|x - ct|$ trotzdem noch gegen Unendlich geht. Im Zweifelsfall setze einfach $t = \frac{n}{c}x$ für $n \to \infty$) und damit auch $A(x - ct) \to 0$. Da aber das Elektron am Anfang in Ruhe war, muss

$$\dot{y}(t \to -\infty) = C = 0$$

gelten. Mit $t \to \infty$ geht (mit der gleichen Argumentation wie oben) wieder $A(x - ct)$ gegen Null und damit auch die Geschwindigkeit in y-Richtung. Somit stoppt die Bewegung des Elektrons in y-Richtung bei einem bestimmten b. Setzen wir unsere Rechnung für $\dot{y}$ in die Gleichung für $\ddot{x}$ ein, so erhält man

$$\ddot{x} = -\left(\frac{e}{cm}\right)^2 A(x - ct)A'(x - ct) \implies \ddot{x}(\dot{x} - c) = -\left(\frac{e}{cm}\right)^2 A(x - ct)A'(x - ct)(\dot{x} - c)$$

Links steht gerade die Ableitung von

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \dot{x}c \qquad \text{denn} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \dot{x}c\right) = \dot{x}\ddot{x} - \ddot{x}$$

und rechts gerade die Ableitung von

$$-\left(\frac{e}{cm}\right)^2 \frac{A(x-ct)^2}{2}$$

denn dafür gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A(x-ct)^2 = 2A(x-ct)A'(x-ct)(\dot{x}-c)$$

Also erhält man durch integrieren:

$$\frac{\dot{x}}{2}(\dot{x}-2c) = -\left(\frac{e}{cm}\right)^2 \frac{A(x-ct)^2}{2} + C$$

mit einer Konstanten C, die wieder aufgrund der Anfangsbedingungen wegfällt. Umgeschrieben lautet dies:

$$\dot{x}(2c-\dot{x}) = \left(\frac{e}{cm}\right)^2 A(x-ct)^2 \geq 0$$

Da aber $A(x-ct)$ für $t \to \infty$ wieder gegen Null geht, muss damit auch $\dot{x}$ gegen Null gehen, aber immer noch positiv sein (die andere Möglichkeit wäre, $\dot{x}$ wäre gleichzeitig größer als $2c$ und kleiner Null. Widerspruch). Also erreicht das Elektron nach der Bestrahlung eine verschobene Ruheposition $(a, b, 0)$ mit $a > 0$, da die Geschwindigkeit positiv ist.

33. Aufgabe: Ebene elektromagnetische Welle

(a) Da

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$$

muss gelten

$$\mathbf{k} = -\frac{\omega}{c}\hat{e}_y$$

Setze jetzt also

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$$

Die Polarisation gibt die Richtung des $\mathbf{E}$-Feldes an, deshalb muss (mit der Amplitude a) gelten:

$$\mathbf{E}_0 = a\hat{e}_x \qquad \mathbf{B}_0 = a\hat{e}_z$$

Damit $\mathbf{k}, \mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ senkrecht aufeinander stehen. Da wir nur am Realteil interessiert sind, setzen wir

$$\mathbf{E} = a \cos\left(\omega\left(-\frac{y}{c} - t\right)\right)\hat{e}_x \qquad \mathbf{B} = a \cos\left(\omega\left(-\frac{y}{c} - t\right)\right)\hat{e}_z$$

(b) Analog zu oben erhält man

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Diesmal setzen wir

$$\mathbf{E}_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

damit $\mathbf{E}$ auf $\mathbf{k}$ senkrecht steht und erhalten damit als letzte Möglichkeit:

$$\mathbf{B}_0 = \frac{a}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

damit auch $\mathbf{B}$ auf den beiden senkrecht steht. Insgesamt also

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos\left(\omega\left(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}c} - t\right)\right) \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos\left(\omega\left(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}c} - t\right)\right)$$

11. Übung

ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK III
(THEORIE C, ELEKTRODYNAMIK), WS 2011/12 BLATT 9

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 09. 01. 12
Besprechung: 11. 01. 12

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Matthias Weinreuter	☐ Gruppe 2 Juraj Streicher	☐ Gruppe 3 Philip Wollfarth	☐ Gruppe 4 Ulf Briskot
☐ Gruppe 5 Valentin Bolsinger	☐ Gruppe 6 Robin Roth	☐ Gruppe 7 Julian Stöckel	☐ Gruppe 8 Stefan Miereis
☐ Gruppe 9 Philipp Rudo	☐ Gruppe 10 Marius Bürkle	☐ Gruppe 11 Guillaume Chalons	☐ Gruppe 12 Justus Zorn
☐ Gruppe 13 Yasmin Anstruther			

*

Aufgabe 1: Elektromagnetische Welle 1

Das elektrische Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle im Vakuum lautet

$$\vec{E} = E_0(\sin(kz - \omega t), 2\cos(kz - \omega t), 0)\,.$$

Wie lautet das zugehörige magnetische Feld?

Aufgabe 2: Doppelbrechung 4

Wir betrachten ein anisotropes Medium, in dem die Dielektrizitätskonstante richtungsabhängig und daher durch einen Tensor ϵ_{ij} gegeben ist. Wählt man die Hauptachsen des Tensors als (kartesische) Koordinatenachsen, dann gilt $D_i = \epsilon_i E_i$, wobei die ϵ_i die Eigenwerte des dielektrischen Tensors sind. Weiters soll gelten $\epsilon_x = \epsilon_y$ (einachsiges Medium).

i) Welche Gleichung gilt für das elektrische Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle mit Frequenz ω und Wellenvektor $\vec{k}$? *1P*

* 19. Dezember 2011 16:41 Uhr

(bitte wenden)

ii) Welche Dispersionsrelationen (d.h. $\omega = \omega(\vec{k})$) ergeben sich hieraus? Wie lauten die Phasengeschwindigkeiten in Abhängigkeit von der Richtung des Wellenvektors? *3P*

Aufgabe 3: Koaxialkabel 3

Ein Koaxialkabel bestehe aus einem langen Draht mit Radius a in einem langen Hohlzylinder mit Innenradius b ($b > a$). Draht und Zylinder seien konzentrisch zur z-Achse. In diesem Fall sind elektromagnetische Wellen dispersionslos, d.h. $\omega = ck$. $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld in Zylinderkoordinaten ρ, φ, z seien

$$\vec{E} = \frac{E_0 \cos(kz - \omega t)}{\rho} \vec{e}_\rho \,, \quad \vec{B} = \frac{E_0 \cos(kz - \omega t)}{\rho} \vec{e}_\varphi \,.$$

i) Zeigen Sie, dass diese Felder die Maxwellgleichungen sowie die Randbedingungen für einen Wellenleiter erfüllen. *1P*

ii) Finden Sie die Längenladungsdichte $\lambda(z, t)$ des inneren Drahtes. *1P*

iii) Finden Sie den Strom im inneren Draht. *1P*

Aufgabe 4: Reflexion an Grenzschicht 4

Eine ebene elektromagnetische Welle fällt aus einem optisch dichteren Medium kommend (Brechungsindex n_1) durch eine ebene Grenzschicht in ein optisch dünneres Medium mit Brechungsindex $n_2 < n_1$. Beide Medien haben dieselbe Permeabilität. Weiters soll für die einfallende elektromagnetische Welle gelten, dass die Komponente des elektrischen Feldes in der Einfallsebene vom Betrag her gleich der Komponente senkrecht zur Einfallsebene ist.

i) Berechnen Sie für den Bereich von Totalreflexion die Phasenverschiebung zwischen der Komponente des reflektierten $\vec{E}$-Feldes senkrecht zur Einfallsebene und der Komponente in der Einfallsebene in Abhängigkeit vom Einfallswinkel und vom Verhältnis n_2/n_1. *2P*

ii) Wie muss bei gegebenen Medien der Einfallwinkel gewählt werden, damit die reflektierte Welle zirkular polarisiert ist? *1P*

iii) Was ist der maximale Wert von n_2/n_1, für den die reflektierte Welle zirkular polarisiert sein kann? *1P*

34. Aufgabe: Elektromagnetische Welle

Die hier benutze Maxwellsche Gleichung ist

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Für das **E**-Feld ist

$$\mathbf{E} = (E_0 \sin(kz - \omega t))\hat{e}_x + (2E_0 \cos(kz - \omega t))\hat{e}_y$$

und damit

$$(\nabla \times \mathbf{E})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j}$$

Da aber nur die Ableitungen in z-Richtung einen Wert haben, ist dies

$$= \epsilon_{i3k} \frac{\partial E_k}{\partial z}$$

Also

$$\nabla \times \mathbf{E} = \epsilon_{132} \frac{\partial E_2}{\partial z}\hat{e}_x + \epsilon_{231} \frac{\partial E_1}{\partial z}\hat{e}_y = 2E_0 k \sin(kz - \omega t)\hat{e}_x + E_0 k \cos(kz - \omega t)\hat{e}_y$$

Somit ist **B** gegeben durch (integrieren und Vorzeichen wechseln)

$$\mathbf{B} = -2cE_0 \frac{k}{\omega} \cos(kz - \omega t)\hat{e}_x + cE_0 \frac{k}{\omega} \sin(kz - \omega t)\hat{e}_y = E_0 c \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} -2\cos(kz - \omega t) \\ \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich stehen auch hier $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{k}$ senkrecht aufeinander.

35. Aufgabe: Doppelbrechung

Die Maxwellgleichungen lauten in diesem Fall:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{5}$$

Außerdem noch die Verknüpfungsgleichung:

$$D_i = \varepsilon_i E_i \qquad \forall i = 1, 2, 3 \tag{6}$$

Wir wählen zur Lösung den Ansatz

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

(i) Wir setzen die Lösung in unsere Maxwellschen Gleichungen ein. Die erste Gleichung liefert direkt

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{k} = 0 \implies \mathbf{D} \perp \mathbf{k}$$

und die zweite analog

$$\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$$

Die zeitliche Ableitung von $\mathbf{B}$ ist $-i\omega\mathbf{B}$ also liefert die dritte Gleichung:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{B} \implies \mathbf{B} = -\frac{ic}{\omega}\nabla \times \mathbf{E}$$

Setzen wir dies in die vierte Maxwellsche Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{i\omega}{c}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Da sich die partielle Zeitableitung von $\mathbf{D}$ auf die einzelnen Komponenten überträgt und diese sich nur um einen konstanten Faktor (nämlich die ε_i) von $\mathbf{E}$ unterscheiden, gilt auch hier:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -i\omega\mathbf{D}$$

und somit

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\mu\mathbf{D}$$

Aufgrund der einfachen Form von $\mathbf{E}$, können wir die linke Seite noch etwas vereinfachen. In isotropen Medium konnten wir dies mithilfe $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ vereinfachen - dies ist hier jetzt nicht mehr möglich. Stattdessen berechnen wir:

$$(\nabla \times \mathbf{E})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\frac{\partial E_k}{\partial x_j} = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} i k_j E_k = i(\mathbf{k} \times \mathbf{E})_i$$

und dann

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_i = i(\nabla \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}))_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\frac{\partial(\mathbf{k} \times \mathbf{E})_k}{\partial x_j}$$

Da aber $\mathbf{k}$ eine Konstante ist, entspricht dies gerade

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = i \cdot i \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -(\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E})$$

Bezeichnen wir mit γ die Diagonalmatrix

$$\gamma = \mathrm{Diag}(\varepsilon_x, \varepsilon_x, \varepsilon_z)$$

so können wir jetzt insgesamt schreiben:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2}\mu\gamma\mathbf{E} = 0$$

Daraus folgert

$$\sum_{j=1}^{3}\left[\left(\varepsilon_i\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2\right)\delta_{ij} + k_i k_j\right] E_j = 0$$

Definiere jetzt den Vorfaktor als Matrix M_{ij}.

(ii) Eine Lösung ist vorhanden, wenn die Determinante Null wird. Wir betrachten zuerst den Spezialfall (da wir eine Rotationssymmetrie haben, da $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) mit

$$\mathbf{k} = (k_1, 0, k_3)^T \qquad v_i^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_i^2}$$

und erhalten

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{v_1^2} - k_3^2 & 0 & k_1 k_3 \\ 0 & \frac{\omega^2}{v_1^2} - k_1^2 - k_3^2 & 0 \\ k_1 k_3 & 0 & \frac{\omega^2}{v_3^2} - k_1^2 \end{pmatrix}$$

Die Determinante muss Null sein. Mit $k^2 = k_1^2 + k_3^2$ folgt

$$\left(\frac{\omega^2}{v_1^2} - k^2\right)\left[\left(\frac{\omega^2}{v_1^2} - k_3^2\right)\left(\frac{\omega^2}{v_3^2} - k_1^2\right) - k_1^2 k_3^2\right] = 0$$

Diese Gleichung liefert die beiden Lösungen

$$\omega^2 = v_1 k^2 \qquad \omega^2 = k_3^2 v_1^2 + k_1^2 v_3^2$$

Für ein allgemeines $\mathbf{k}$ erhalten wir dann die Lösungen:

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 v_1^2 \qquad \omega^2 = (k_1^2 + k_2^2) v_3^2 + k_3^2 v_1^2$$

36. Aufgabe: Koaxialkabel

(i) Wir zeigen zuerst, dass die Maxwellschen Gleichungen erfüllt sind. Sie lauten (da zwischen den beiden Drähten Vakuum herrscht und keine Ladung oder Ströme verhanden ist):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Wir benutzen immer die Definitionen von grad, div und rot in Zylinderkoordinaten. In allen Fällen fallen viele Komponenten weg, da das $\mathbf{E}$-Feld und das $\mathbf{B}$-Feld nur in eine Richtung zeigen. Es ist:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho E_\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(E_0 \cos(kz - \omega t)) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

und damit sind die ersten beiden Gleichungen erfüllt. Außerdem

$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{e}_\phi \frac{\partial E_\rho}{\partial z} = \hat{e}_\phi(-\frac{E_0}{\rho} k \sin(kz - \omega t))$$

und auf der anderen Seite:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{E_0}{\rho}\omega \sin(kz - \omega t)\hat{e}_\phi$$

Und mit $kc = \omega$ stimmt auch diese Gleichung. Für die letzte gilt:

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\hat{e}_\rho \frac{\partial B_\phi}{\partial z} + \hat{e}_z \frac{1}{\rho} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\phi)\right)}_{=0 \text{ wie oben}} = \hat{e}_\rho \frac{E_0}{\rho} k \sin(kz - \omega t)$$

und auf der anderen Seite

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{E_0}{\rho}\omega \sin(kz - \omega t)\hat{e}_\rho$$

Wieder ist die Gleichung aufgrund der Dispersionsrelation erfüllt. Prüfen wir jetzt noch die Randbedingungen eines Wellenleiters. Diese sagen aus, dass auf dem Rand S des Wellenleiters die Tangentialkomponente von $\mathbf{E}$ und die Normalkomponente von $\mathbf{B}$ verschwinden muss. Jetzt ist

$$\hat{e}_\rho \times \mathbf{E} = 0$$

da $\mathbf{E}$ nur in ρ-Richtung zeigt und außerdem

$$\hat{e}_\rho \cdot \mathbf{B} = 0$$

da $\mathbf{B}$ nur in ϕ-Richtung zeigt. Insbesondere sind also auch die Randbedingungen erfüllt.

(ii) Wir benutzen das Gaussche Gesetz mit

$$\oint_S \mathbf{E}\, \mathrm{d}\mathbf{A} = 4\pi Q$$

Als Fläche betrachten wir einen Zylinder an der Stelle z mit Höhe l und Radius a im inneren Draht. Seine Ladung geteilt durch die Länge l entspricht der Ladung pro Länge - und für den allgemeinen Fall betrachten wir noch den Grenzfall für $l \to 0$.

Also:

$$\oint_S \mathbf{E}\ \mathrm{d}\mathbf{A} = \int\limits_z^{z+l}\int\limits_0^{2\pi} E_\rho \rho|_{\rho=a}\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}z' = 2\pi \int\limits_z^{z+l} E_0 \cos(kz' - \omega t)\ \mathrm{d}z'$$

$$= \frac{2\pi E_0}{k}[\sin(kz + kl - \omega t) - \sin(kz - \omega t)]$$

Also ist die Gesamtladung in diesem Zylinder gegeben durch

$$Q = \frac{E_0}{2k}[\sin(kz + kl - \omega t) - \sin(kz - \omega t)]$$

Um λ zu bestimmen, teilen wir durch die Höhe l und betrachten den Grenzwert $l \to 0$:

$$\lambda = \lim_{l\to 0} \frac{Q}{l} = \lim_{l\to 0} \frac{E_0}{2kl}[\sin(kz + kl - \omega t) - \sin(kz - \omega t)]$$

Wir führen die Definition $\alpha = kl$ ein und können schreiben

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{E_0}{2} \frac{\sin(kz - \omega t + \alpha) - \sin(kz - \omega t)}{\alpha}$$

Der hintere Bruch ist gerade der Differenzenquotient von sin und da der Sinus eine differenzierbare Funktion ist, ist der Grenzwert gegeben durch:

$$\lambda = \frac{E_0}{2} \frac{\partial \sin(kz - \omega t + \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{E_0}{2} \cos(kz - \omega t)$$

(iii) Eine andere Maxwellsche Gleichung liefert uns:

$$\int_S \mathbf{B}\ \mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \int_S \mathbf{E}\ \mathrm{d}\mathbf{A}$$

Wir betrachten eine Querschnittsfläche des inneren Zylinders. Nun wirkt das **E**-Feld aber nur in ρ-Richtung, weshalb das Integral $\int_S \mathbf{E}\ \mathrm{d}\mathbf{A}$ Null ergibt. Es ist also

$$I = \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{E_0}{\rho} \cos(kz - \omega t)\rho|_{\rho=a}\ \mathrm{d}\phi = \frac{E_0 c}{2} \cos(kz - \omega t)$$

37. Aufgabe: Reflexion an Grenzschicht

Im Folgenden werden wir vor allem folgende Formeln benutzen. Dabei ist α_0 der Winkel der einfallenden, α_2 der Winkel der transmittierten und α_3 der Winkel der reflektierten

Welle (die Winkel werden immer zum Lot gemessen).

Snellius-Brechungsgesetz

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$$

Fresnelsche Formeln für die reflektierte Komponente für senkrechte Polarisation

$$\left(\frac{E_0''}{E_0}\right)_s = \frac{n_1\cos\alpha_1 - n_2\cos\alpha_2}{n_1\cos\alpha_1 + n_2\cos\alpha_2}$$

und für parallele Polarisation

$$\left(\frac{E_0''}{E_0}\right)_p = \frac{n_2\cos\alpha_1 - n_1\cos\alpha_2}{n_2\cos\alpha_1 + n_1\cos\alpha_2}$$

(i) Totalreflektion tritt dann ein, wenn der Winkel α_2 (der transmittierten Welle) größer als 90° wird. Betrachten wir erst einmal der Grenzfall $\alpha_2 = \pi/2$, dann ist der Grenzwinkel gegeben durch

$$\sin\alpha_1 = \frac{n_2}{n_1} =: \sin\alpha_0$$

Betrachten wir jetzt einen Einfallswinkel $\alpha_1 > \alpha_0$, so muss das Snelliussche Brechungsgesetz weiterhin gelten, also

$$\sin\alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}\sin\alpha_2 = \sin\alpha_0 \sin\alpha_2 \implies \sin\alpha_2 = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0} > 1$$

da der Winkel $\alpha_1 > \alpha_0$. Dies ist nur möglich, wenn α_2 komplex ist. Es gilt dann

$$\cos\alpha_2 = \sqrt{1-\sin^2\alpha_2} = i\sqrt{\sin^2\alpha_2 - 1} = i\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0}\right)^2 - 1}$$

Dies können wir jetzt in die Fresnelschen Formeln einsetzen.

Senkrechte Polarisation Es ist

$$\left(\frac{E_0''}{E_0}\right)_s = \frac{n_1\cos\alpha_1 - n_2\cos\alpha_2}{n_1\cos\alpha_1 + n_2\cos\alpha_2} = \frac{\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1\cos\alpha_2}$$

nach dem Brechungsgesetz und mit unserem Ergebnis für α_1 dann zuerst

$$= \frac{\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \sin\alpha_2\sin\alpha_0\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_2\sin\alpha_0\cos\alpha_2} = \frac{\cos\alpha_1 - \sin\alpha_0\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1 + \sin\alpha_0\cos\alpha_2}$$

und schließlich

$$= \frac{\cos\alpha_1 - \sin\alpha_0 i\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0}\right)^2 - 1}}{\cos\alpha_1 + \sin\alpha_0 i\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0}\right)^2 - 1}}$$

Fassen wir Zähler und Nenner getrennt als komplexe Zahlen auf, so sind sie gerade komplex Konjugierte. Insbesondere haben sie den gleichen Betrag und lassen sich somit schreiben als

$$= \frac{Ae^{-i\phi}}{Ae^{i\phi}} = e^{-2i\phi}$$

Der Tangens dieses Phasenwinkels ϕ ist gerade das Verhältnis aus Imaginärteil und Realteil des Zählers (oder Nenners mit anderen Vorzeichen). Es ist also

$$\tan\phi = \sin\alpha_0 \frac{\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0}\right)^2 - 1}}{\cos\alpha_1}$$

Diesen Winkel ϕ wollen wir mit ϕ_s für senkrecht bezeichnen.

Parallele Polarisation Eine vollkommen analoge Rechnung lässt sich auch für parallele Polarisation durchführen. Stattdessen kann man aber auch die Fresnelsche Formel betrachten und erkennen, dass sie sich nur um die Faktoren n_1 und n_2 unterscheidet. Mit $\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}$ kommt man also zum Ergebnis

$$\tan\phi_p = \frac{\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0}\right)^2 - 1}}{\sin\alpha_0\cos\alpha_1}$$

Da die Amplitude der einfallenden Anteile in senkrechter sowie paralleler Richtung gleich war, benötigen wir zur Betrachtung des Phasendifferenz nur diese beiden Winkel ϕ_s und ϕ_p zu betrachten. Für den Differenzwinkel δ gilt (da in den Exponenten immer $-2i\phi_s$ bzw. $-2i\phi_p$ steht):

$$\delta = 2\phi_p - 2\phi_s = 2(\phi_p - \phi_s)$$

und damit

$$\tan\frac{\delta}{2} = \tan(\phi_p - \phi_s) = \frac{\tan\phi_p - \tan\phi_s}{1 + \tan\phi_p \tan\phi_s}$$

Nun müssen wir nur noch unsere Ergebnis einsetzen

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0}\right)^2 - 1}\left(\frac{1}{\sin\alpha_0} - \sin\alpha_0\right)}{\cos\alpha_1\left(1 + \frac{\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0}\right)^2 - 1}{\cos^2\alpha_1}\right)} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_0}(1 - \sin^2\alpha_0)\cos\alpha_1}{\cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_0 + \sin^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_0}$$

und mit

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

erhält man

$$= \cos\alpha_1\frac{\sqrt{\sin^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_0}}{\sin^2\alpha_1}$$

und weiterhin gilt natürlich

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1} =: n$$

n soll hier keine physikalische Bedeutung haben, sondern nur eine Abkürzung sein.

(ii) Damit die Welle zirkular polarisiert ist, muss

$$\delta = \frac{\pi}{2} \implies \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{4}$$

gelten. Somit muss also

$$\tan\frac{\delta}{2} = 1 \implies \sin^2\alpha_1 = \cos\alpha_1\sqrt{\sin^2\alpha_1 - n^2}$$

gelten. Die letzte Gleichung quadrieren wir jetzt

$$\sin^4\alpha_1 = \cos^2\alpha_1(\sin^2\alpha_1 - n^2) = (1 - \sin^2\alpha_1)(\sin^2\alpha_1 - n^2)$$

und setzen $x = \sin\alpha_1$

$$x^4 = (1 - x^2)(x^2 - n^2) \implies x^2 - \frac{x^4}{1 - x^2} = n^2$$

Da n durch die Materialien bestimmt ist, lösen wir nach x auf und erhalten

$$n^2 - n^2x^2 = x^2 - 2x^4 \implies 0 = x^2(1+n^2) - 2x^4 - n^2$$

Dies wird gelöst durch

$$x_{1/2}^2 = \frac{1+n^2 \pm \sqrt{(1+n^2)^2 - 8n^2}}{4} = \frac{1}{4}\left(1+n^2 \pm \sqrt{1-6n^2+n^4}\right) = \sin^2\alpha_1$$

(iii) Ein Teilergebnis oben war die Formel

$$x^2 - \frac{x^4}{1-x^2} = n^2$$

mit den Bezecihnungen

$$x = \sin\alpha_1 \qquad n = \frac{n_2}{n_1}$$

Um jetzt das maximale Brechungsverhältnis zu bestimmen, setzen wir

$$y = n^2 \qquad u = x^2$$

und erhalten damit

$$u - \frac{u^2}{1-u} = y$$

Dies müssen wir jetzt maximieren, weshalb wir

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = 0$$

setzen. Dies führt auf

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = 1 - \frac{u^2 + 2u(1-u)}{(1-u)^2} = \frac{1-2u+u^2-u^2-2u+2u^2}{(1-u)^2} = \frac{2u^2-4u+1}{(1-u)^2} = 0$$

Dies wird gelöst durch

$$u_{1/2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Da aber $|x| = |\sin\alpha_1| \leq 1$ gelten muss, muss auch $u \leq 1$ gelten und damit

$$u = u_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Anschließend ist noch

$$y\,(u = u_2) = 3 - 2\sqrt{2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$$

und damit das maximale Verhältnis, bei dem noch zirkular polarisiertes Licht entsteht gegeben durch

$$\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

12. Übung

ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK III (THEORIE C, ELEKTRODYNAMIK), WS 2011/12

BLATT 10

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 16. 01. 12
Besprechung: 18. 01. 12

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Matthias Weinreuter	☐ Gruppe 2 Juraj Streicher	☐ Gruppe 3 Philip Wollfarth	☐ Gruppe 4 Ulf Briskot
☐ Gruppe 5 Valentin Bolsinger	☐ Gruppe 6 Robin Roth	☐ Gruppe 7 Julian Stöckel	☐ Gruppe 8 Stefan Miereis
☐ Gruppe 9 Philipp Rudo	☐ Gruppe 10 Marius Bürkle	☐ Gruppe 11 Guillaume Chalons	☐ Gruppe 12 Justus Zorn
☐ Gruppe 13 Yasmin Anstruther			

*

Aufgabe 1: Reflexion an einer leitenden Fläche 5

i) In einem leitenden Material mit Leitwert σ propagiere eine monochromatische ebene elektromagnetische Welle in die positive z-Richtung. Die Polarisation zeige in x-Richtung. Frequenz und elektrische bzw. magnetische Amplituden seien mit ω, E_0 und B_0 bezeichnet. Die Wellengleichungen lauten in diesem Fall *2P*

$$\Delta\vec{E} = \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} + \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\,, \quad \Delta\vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} + \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\,.$$

Geben Sie einen Ansatz für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ an. [Hinweis: Wegen der Dämpfungsterme wird der Wellenvektor $\vec{k}$ komplex.] Finden Sie $\vec{k}^2$ als Funktion von ϵ, μ, σ und ω.

Berechnen Sie mittels der Maxwell-Gleichung $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ den Zusammenhang zwischen elektrischer und magnetischer Amplitude.

[Diese Aufgabe benützt SI-Einheiten!]

*20. Dezember 2011 16:19 Uhr

(bitte wenden)

ii) Überprüfen Sie, dass die elektromagnet. Welle in Ausbreitungsrichtung gedämpft wird. *1P*

iii) Die x-y-Ebene bilde eine Grenzfläche zwischen einem nichtleitenden Medium (ϵ_1, μ_1) für $z < 0$ und einem Leiter (ϵ_2, μ_2, $\sigma_2 \neq 0$) für $z > 0$. Eine ebene elektromagnetische Welle mit Frequenz ω, Wellenvektor $\vec{k}_1$, Amplitude E_{0I}, die in x-Richtung polarisiert ist, propagiert in die positive z-Richtung und fällt somit senkrecht auf die Grenzfläche. Geben Sie Ansätze für die einfallenden, reflektierten und gebrochenen elektrischen und magnetischen Felder an (benützen Sie die obigen Resultate für die letzteren). *1P*

iv) Für eine senkrecht auf die Grenzschicht auftreffende elektromagnetische Welle lauten die relevanten Randbedingungen *1P*

$$\vec{E}_1^{||} - \vec{E}_2^{||} = 0\,, \quad \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1^{||} - \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2^{||} = 0\,.$$

Berechnen Sie hieraus die resultierenden Fresnel-Gleichungen, d.h. die Amplituden E_{0R} und E_{0T} in Abhängigkeit von E_{0I} und den Materialkonstanten. Was geschieht im Limes unendlich großer Leitfähigkeit?

Aufgabe 2: Lineare Antenne	4

Die Stromverteilung einer linearen Antenne sei gegeben durch $\vec{j}(\vec{x},t) = \vec{j}(\vec{x})e^{-i\omega t}$ mit

$$\vec{j}(\vec{x}) = I_0 \sin\left(\frac{kd}{2} - k|\vec{x}|\right)\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z \quad \text{falls} \quad |z| \le \frac{d}{2}\,,$$

$$\vec{j} = 0 \quad \text{falls} \quad |z| > \frac{d}{2}\,.$$

i) Berechnen Sie das resultierende elektrische und magnetische Feld in der Fernzone (Strahlungszone). *2P*

ii) Berechnen Sie die pro Raumwinkel in der Fernzone abgestrahlte Leistung. *1P*

iii) Zeigen Sie, dass keine magnetische Dipol- und keine elektrische Quadrupolstrahlung ausgesandt wird. *1P*

Aufgabe 3: Feld einer bewegten Punktladung 3

i) Eine Punktladung q, die zur Zeit $t = 0$ am Ursprung $\vec{r} = 0$ war, bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$. Zeigen Sie, ausgehend von den Liénard–Wiechert-Potentialen für eine beliebige bewegte Punktladung, dass sich die entsprechenden Potentiale als *2P*

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{qc}{\sqrt{(c^2t - \vec{r}\cdot\vec{v})^2 + (c^2 - \vec{v}^2)(\vec{r}^2 - c^2t^2)}}\,,$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\vec{v}}{c}\Phi(\vec{r},t)\,,$$

schreiben lassen.

ii) Berechnen Sie das elektrische Feld der gleichförmig bewegten Punktladung von i). In welche Richtung zeigt dieses Feld? *1P*

38. Aufgabe: Reflexion an einer leitenden Fläche

TODO: In dieser Aufbae hat sich ein falsches Vorzeichen eingeschlichen! Bitte beachten

(i) Wir wählen den Ansatz

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

und außerdem

$$\mathbf{k} = k\hat{e}_z = (a+ib)\hat{e}_z$$

Wir wissen schon

$$\mathbf{E}_0 = E_0\hat{e}_x$$

Setzen wir diesen Ansatz in die gegebene Gleichung ein, so erhalten wir aus

$$\Delta\mathbf{E} = -k^2\mathbf{E} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{E} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = \omega^2\mathbf{E}$$

die Gleichung

$$k^2 = -\mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

da der Faktor $-\mathbf{E}$ in allen Termen vorkommt. Außerdem liefert uns die zweite Gleichung mit

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\omega B_0 e^{i(kz-\omega t)} \qquad \nabla\times\mathbf{E} = ikE_0 e^{i(kz-\omega t)}\hat{e}_y$$

da das **E**-Feld nur in x-Richtung zeigt. Es muss also gelten

$$ikE_0\hat{e}_y = i\omega\mathbf{B}_0$$

und damit

$$\mathbf{B}_0 = \frac{k}{\omega}E_0\hat{e}_y$$

Insgesamt haben wir also jetzt die Gleichungen:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(kz-\omega t)}\hat{e}_x \qquad \mathbf{B} = \frac{E_0}{v}e^{i(kz-\omega t)}\hat{e}_y$$

(ii) Aus der Gleichung für k^2:

$$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

und der Vereinbarung

$$k = a + ib \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

können wir folgern

$$k^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i2ab = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

und damit

$$a^2 - b^2 = \mu\varepsilon\omega^2 \qquad 2ab = \mu\sigma\omega$$

Aus der letzten Formel folgern wir

$$a = \frac{\mu\sigma\omega}{2b}$$

und damit

$$a^2 - b^2 = \frac{\mu^2\sigma^2\omega^2}{4b^2} - b^2 \implies b^4 - b^2\mu\varepsilon\omega^2 - \frac{\mu^2\sigma^2\omega^2}{4} = 0$$

Also Lösung für b^2 erhalten wir

$$b^2_{1/2} = \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2\varepsilon^2\omega^4 + 4\mu^2\sigma^2\omega^2}{4}}$$

Da b reell sein muss, ist nur die positive Lösung für b^2 sinnvoll . Es ist dann

$$\mathbf{E} = E_0\hat{e}_x e^{i(kz-\omega t)} = E_0\hat{e}_x e^{i((a+ib)z-\omega t)} = E_0\hat{e}_x e^{i(az-\omega t)} e^{-bz}$$

Die Welle propagiert in positive z-Richtung, d.h. a muss positiv sein. Da

$$a = \frac{\mu\sigma\omega}{b}$$

muss damit auch b positiv sein. Das bedeutet, der Term e^{-bz} führt zu einer Abschwächung in Ausbreitungsrichtung.

(iii) Wir benutzen die Ansätze

$$\mathbf{E}_I = E_{0I}\hat{e}_x e^{i(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \qquad \mathbf{B}_I = B_{0I}\hat{e}_y e^{i(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

für die eingehende Welle (dafür wissen wir schon die Polarisationsrichtungen),

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_{0R} e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \qquad \mathbf{B}_R = \mathbf{B}_{0R} e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

für die reflektierte Welle (jetzt natürlich noch in alle möglichen Richtungen möglich) und für die transmittierte Welle

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_{0T} e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \qquad \mathbf{B}_T = \mathbf{B}_{0T} e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

Nun wissen wir aber schon einiges über die Wellen. Einerseits ist die einfallende Welle propagierend in die z-Richtung, also

$$\mathbf{k}_1 = k_1 \hat{e}_z = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \hat{e}_z$$

Da sich die reflektierte Welle im selben Medium wie die eingehende Welle befindet, gilt auch für sie

$$k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$$

und damit

$$\mathbf{k}_2 = -k_2 \hat{e}_z$$

Für die transmittierte Welle gilt nach oben:

$$|\mathbf{k}_3|^2 = k_3^2 = -\mu_2 \varepsilon_2 \omega^2 + i \mu_2 \sigma_2 \omega$$

und damit

$$\mathbf{k}_3 = k_3 \hat{e}_z$$

Weiterhin sollte natürlich die Maxwellgleichung

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

in jedem Medium und für jede Welle gelten. Dies führt für jede Welle einzeln auf

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega}$$

Also insgesamt:

$$\mathbf{E}_I = E_{0I}\hat{e}_x e^{i(k_1 z - \omega t)} \qquad \mathbf{B}_I = \frac{k_1}{\omega} E_{0I}\hat{e}_y e^{i(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$$

für die eingehende Welle,

$$\mathbf{E}_R = E_{0R}\hat{e}_x e^{i(k_2 z - \omega t)} \qquad \mathbf{B}_R = \frac{k_2}{\omega} E_{0R}\hat{e}_y e^{i(k_2 z - \omega t)}$$

für die reflektierte Welle und für die transmittierte Welle

$$\mathbf{E}_T = E_{0T}\hat{e}_x e^{i(k_3 z - \omega t)} \qquad \mathbf{B}_T = \frac{k_3}{\omega} E_{0T}\hat{e}_y e^{i(k_3 z - \omega t)}$$

(iv)

$$\mathbf{E_1}'' - \mathbf{E_2}'' = \mathbf{0}$$

$$E_{0I} + E_{0R} = E_{0T}$$

$$\frac{1}{\mu_1}\mathbf{B_1}'' - \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B_2}'' = \mathbf{0}$$

$$\frac{k_1}{\mu_1\omega}(E_{0I} - E_{0R}) = \frac{k_2}{\mu_2\omega} E_{0T}$$

$$E_{0I} - E_{0R} = \beta E_{0T}$$

$$\beta = \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1}$$

$$E_{0R} = \frac{1-\beta}{1+\beta} E_{0I}$$

$$E_{0T} = \frac{2}{1+\beta} E_{0I}$$

Grenzfall: $\sigma \to \infty$

$$E_{0R} = -E_{0I}$$

$$E_{0T} = 0$$

Also entsteht im Grenzfall eine Totalreflektion.

39. Aufgabe: Lineare Antenne

Zur Lösung dieser Aufgabe benötigen wir eine Integralformel:

$$\int \sin(a+bx)e^{cx}\,\mathrm{dx} = \frac{e^{cx}}{b^2+c^2}\left(-b\cos(a+bx)+c\sin(a+bx)\right)$$

Diese ergibt sich z.B. durch zweimalige partielle Integration.

(a) Wie in der Vorlesung hergeleitet, ist der zeitunabhängige Teil des Vektorpotentials im Fernfeld gegeben durch

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikr}}{cr}\int \mathrm{d}^3\mathrm{x}'\mathbf{j}_\omega(\mathbf{x}')e^{-ik\hat{n}\mathbf{x}'}$$

Ist Θ der Winkel des Beobachtungspunktes $\mathbf{x}$ zur z-Achse, so ist

$$\hat{n}\cdot\mathbf{x}' = z'\cos\Theta$$

da $\mathbf{x}'$ immer nur in die z-Richtung zeigt. Des weiteren ist das Integral aufgrund der drei Deltadistributionen eingeschränkt auf

$$\mathbf{A}_{\omega_z} = \frac{e^{ikr}}{cr}\int\limits_{-d/2}^{d/2}\mathrm{d}z'\sin\left(\frac{kd}{2}-k|z'|\right)e^{-ikz'\cos\theta}$$

Wir spalten das Integral auf in einem Teil mit positivem z' und einen Teil mit negativen z' um den Betrag weglassen zu können:

$$= \frac{e^{ikr}}{cr}\left(\int\limits_0^{d/2}\mathrm{d}z'\sin\left(\frac{kd}{2}-kz'\right)e^{-ikz'\cos\theta} - \int\limits_0^{-d/2}\mathrm{d}z'\sin\left(\frac{kd}{2}+kz'\right)e^{-ikz'\cos\theta}\right)$$

Nun können wir unsere Integralformel anwenden mit

$$a=\frac{kd}{2}\qquad b=\mp k\qquad c=-ik\cos\theta$$

Wir erhalten also grundsätzlich die Formel

$$F_\pm(z') = \frac{e^{-ikz'\cos\theta}}{k^2\sin^2\theta}\left(\pm k\cos\left(\frac{kd}{2}\mp kz'\right)-ik\cos\theta\sin\left(\frac{kd}{2}\mp kz'\right)\right)$$

da wir $k^2-k^2\cos^2\theta = k^2\sin^2\theta$ ausgenutzt haben. In diesen Ausdruck müssen jetzt die einzelnen Grenzen $0, d/2, -d/2$ eingesetzt werden und zusammengerechnet werden. Das obere Vorzeichen ist das erste Integral, das untere das zweite.

Grenze $z' = \pm d/2$ Dann ist

$$\frac{kd}{2} \mp kz' = 0$$

und damit fallen alle Sinusterme weg - die Cosinusterme bleiben (mit einer 1) stehen. Es ist also

$$F_{\pm}(\pm d/2) = \pm \frac{e^{\mp i \frac{kd}{2}\cos\theta}}{k \sin^2\theta}$$

Grenze $z' = 0$ Dann ist

$$F_{\pm}(0) = \frac{1}{k\sin^2\theta}\left(\pm\cos\left(\frac{kd}{2}\right) - i\cos\theta\sin\left(\frac{kd}{2}\right)\right)$$

Fassen wir nun zusammen:

$$\int\limits_0^{d/2} \mathrm{d}z' \sin\left(\frac{kd}{2} - kz'\right) e^{-ikz'\cos\theta} - \int\limits_0^{-d/2} \mathrm{d}z' \sin\left(\frac{kd}{2} + kz'\right) e^{-ikz'\cos\theta}$$

$$= F_+(d/2) - F_+(0) - F_-(-d/2) + F_-(0) = F_+(d/2) - F_-(-d/2) + F_-(0) - F_+(0)$$

$$= \frac{1}{k\sin^2\theta}\left(\underbrace{e^{-i\frac{kd}{2}\cos\theta} + e^{i\frac{kd}{2}\cos\theta}}_{=2\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)} - \cos\left(\frac{kd}{2}\right) + i\cos\theta\sin\left(\frac{kd}{2}\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right) - i\cos\theta\sin\left(\frac{kd}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{k\sin^2\theta}\left(\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)\right)$$

und damit insgesamt

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{2e^{ikr}}{crk\sin^2\theta}\left(\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)\right)\hat{e}_z$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \approx ik\hat{e}_r \times \mathbf{A} \approx ik|\mathbf{A}|\sin\theta\hat{e}_\phi$$

$$\mathbf{E} = -\hat{e}_r \times \mathbf{B} = ik|\mathbf{A}|\sin\theta\hat{e}_\theta$$

(b)

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\Re\left(\vec{E} \times \vec{B}^*\right) = \frac{c}{8\pi}|\vec{B}|^2\vec{e}_r$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\vec{B}(t=0)|^2 \vec{e}_r$$

$$\vec{B} = i\frac{\omega}{c} \vec{e}_r \times \vec{A}$$

Somit

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{2I^2}{4\pi c r^2} \left(\frac{\left(\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)\right)}{\sin\theta} \right)^2 \vec{e}_r$$

Und somit

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = r^2 \vec{e}_r \langle \vec{S} \rangle = \frac{2I^2}{4\pi c} \left(\frac{\left(\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)\right)}{\sin\theta} \right)^2$$

Magnetischer Dipol Die vom Strom $\mathbf{j}$ erzeugte Magnetisierung ist gerade

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} \times \mathbf{j}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} yj \\ -xj \\ 0 \end{pmatrix}$$

wenn

$$j = |\mathbf{j}|$$

ist. Insbesondere ist also der magnetische Dipolmoment gegeben durch

$$\mathbf{m} = \int \mathcal{M} \, \mathrm{d}^3\mathrm{x} = \frac{1}{2} \int \begin{pmatrix} yj \\ -xj \\ 0 \end{pmatrix} \, \mathrm{d}^3\mathrm{x}$$

Nun führt das $\delta(x)\delta(y)$ aber darauf, dass für x und y jeweils Null eingesetzt werden muss und insgesamt ist

$$\mathbf{m} = 0$$

Magnetischer Quadrupol Insgesamt ist ein Integral der Form

$$\int \mathbf{x}'(\hat{x} \cdot \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') \, \mathrm{d}^3\mathrm{x}'$$

zu lösen. Dazu berechnen wir zuerst über die Kontinuitätsgleichung die Ladungsdichte ρ:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = i\omega\rho \implies \rho = -\frac{i}{\omega}\frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{iI_0 k}{\omega} \cos\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \, \mathrm{sgn}(z)\delta(x)\delta(y)$$

Betrachten wir jetzt das Integral, so fallen alle x- und y-Teile aufgrund der Deltadistributionen weg. Das Integral hat also die Form

$$\propto \int\limits_{-d/2}^{d/2} z^2 \cos\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \operatorname{sgn}(z)\,\mathrm{dz} = \int\limits_{0}^{d/2} z^2 \cos\left(\frac{kd}{2} - kz\right) \mathrm{dz} + \int\limits_{0}^{-d/2} z^2 \cos\left(\frac{kd}{2} + kz\right) \mathrm{dz}$$

Die einzelnen Integrale lassen sich mit partieller Integration lösen und man erhält:

$$\frac{dk - 2\sin\left(\frac{dk}{2}\right)}{k^3} - \frac{dk - 2\sin\left(\frac{dk}{2}\right)}{k^3} = 0$$

und damit auch kein Quadrupolmoment.

40. Aufgabe: Feld einer bewegten Punktladung

(a) Das Skalarpotential lautet nach der Lienard-Wiechert-Gleichung gerade

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}(t_R)| - \frac{1}{c}(\mathbf{x} - \mathbf{R}(t_R)) \cdot \mathbf{v}}$$

mit der retardierten Zeit

$$t_R = t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{R}(t_R)|$$

Die Gleichung für die retardierte Zeit können wir zuerst einmal umstellen zu

$$|\mathbf{x} - \mathbf{R}(t_R)| = c(t - t_R) \tag{7}$$

und damit lautet unser Potential

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{qc}{c^2(t - t_R) - (\mathbf{x} - \mathbf{v}t_R)\mathbf{v}} = \frac{qc}{t_R(\mathbf{v}^2 - c^2) + c^2 t - \mathbf{x}\mathbf{v}}$$

wobei hier schon benutzt wurde, dass

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{v}t$$

gegeben ist. Aus der Gleichung (7) können wir durch Quadrieren erhalten

$$|\mathbf{x} - \mathbf{R}(t_R)|^2 = \mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{v}t_R + \mathbf{v}^2 t_R = t^2 c^2 - 2tt_R c^2 + t_R^2 c^2$$

und damit

$$t_R^2(\mathbf{v}^2 - c^2) + 2t_R(tc^2 - \mathbf{xv}) + (\mathbf{x}^2 - t^2c^2) = 0$$

Diese Gleichung können wir jetzt mit $(\mathbf{v}^2 - c^2)$ multiplizieren und geschickt 0 addieren:

$$\underbrace{t_R^2(\mathbf{v}^2 - c^2)^2 + 2t_R(tc^2 - \mathbf{xv})(\mathbf{v}^2 - c^2) + (tc^2 - \mathbf{xv})^2}_{\text{1. binomische Formel}} - (tc^2 - \mathbf{xv})^2 + (\mathbf{x}^2 - t^2c^2)(\mathbf{v}^2 - c^2) = 0$$

Ziehen wir also die binomische Formel zusammen und lösen nach ihr auf:

$$(t_R(\mathbf{v}^2 - c^2) + (tc^2 - \mathbf{xv}))^2 = (tc^2 - \mathbf{xv})^2 + (\mathbf{x}^2 - t^2c^2)(c^2 - \mathbf{v}^2)$$

Wir sehen schon, dass dies gerade das Quadrat des Nenners der Formel für das Skalarpotential ist, also ist ϕ:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{qc}{\sqrt{(tc^2 - \mathbf{xv})^2 + (\mathbf{x}^2 - t^2c^2)(c^2 - \mathbf{v}^2)}}$$

und damit wie in der Aufgabenstellung gefordert. Die Formel für $\mathbf{A}$ folgt einfach aus der anderen Lienard-Wiechert-Gleichung, da

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\dot{\mathbf{R}}(t_R)}{c}\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c}\phi(\mathbf{x}, t)$$

(b) Es ist nach der Kettenregel

$$-\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}} = \underbrace{\frac{qc}{2\sqrt{(tc^2 - \mathbf{xv})^2 + (\mathbf{x}^2 - t^2c^2)(c^2 - \mathbf{v}^2)}^3}}_{=a/2} \big(2(c^2t - \mathbf{xv})(-\mathbf{v}) + (c^2 - \mathbf{v}^2)2\mathbf{x}\big)$$

und etwas umgestellt

$$-\nabla\phi = a\left((c^2 - \mathbf{v}^2)\mathbf{x} - (c^2t - \mathbf{xv})\mathbf{v}\right)$$

Auch kann man (mit der Kettenregel) berechnen:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}a\left((c^2t - \mathbf{xv})c^2 + (c^2 - \mathbf{v}^2)(-c^2t)\right)$$

Um jetzt das $\mathbf{E}$-Feld zu bestimmen, müssen wir einfach unsere beiden Ergebnisse zusammenfügen:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = a\left((c^2 - \mathbf{v}^2)\mathbf{x} - (c^2 t - \mathbf{x}\mathbf{v})\mathbf{v}\right) + \frac{\mathbf{v}}{c^2} a\left((c^2 t - \mathbf{x}\mathbf{v})c^2 + (c^2 - \mathbf{v}^2)(-c^2 t)\right)$$

Betrachten wir die Summanden einzeln:

Koeffizient von $(c^2 t - \mathbf{x}\mathbf{v})$: Im ersten Summand taucht $-a\mathbf{v}$ auf und im zweiten Summanden

$$\frac{\mathbf{v}}{c^2} a c^2 = a\mathbf{v}$$

Also heben die beiden Summanden sich gerade auf.

Koeffizient von $(c^2 - \mathbf{v}^2)$: Aus dem $\nabla\phi$-Term kommt $a\mathbf{x}$ und aus dem $\frac{\partial A}{\partial t}$-Term kommt

$$a\frac{\mathbf{v}}{c^2}(-c^2 t) = -a\mathbf{v}t = -a\mathbf{R}(t)$$

Zusammen ergibt sich also

$$\mathbf{E} = a(c^2 - \mathbf{v}^2)(\mathbf{x} - \mathbf{R}(t)) \qquad a = \frac{qc}{\sqrt{(tc^2 - \mathbf{x}\mathbf{v})^2 + (\mathbf{x}^2 - t^2 c^2)(c^2 - \mathbf{v}^2)}^3}$$

Die Richtung von $\mathbf{E}$ ist nur durch den letzten Fakor $\mathbf{x} - \mathbf{R}(t)$ bestimmt, alles andere sind skalare Größen. Der Vektor $\mathbf{x} - \mathbf{R}(t)$ und führt vom Punkt auf der Teilchenbahn zur Zeit t bis zum Beobachtungspunkt. Das $\mathbf{E}$-Feld zeigt also radial vom Punkt $\mathbf{R}(t)$ weg.

13. Übung

ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK III (THEORIE C, ELEKTRODYNAMIK), WS 2011/12

BLATT 11

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 23. 01. 12
Besprechung: 25. 01. 12

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Matthias Weinreuter	☐ Gruppe 2 Juraj Streicher	☐ Gruppe 3 Philip Wollfarth	☐ Gruppe 4 Ulf Briskot
☐ Gruppe 5 Valentin Bolsinger	☐ Gruppe 6 Robin Roth	☐ Gruppe 7 Julian Stöckel	☐ Gruppe 8 Stefan Miereis
☐ Gruppe 9 Philipp Rudo	☐ Gruppe 10 Marius Bürkle	☐ Gruppe 11 Guillaume Chalons	☐ Gruppe 12 Justus Zorn
☐ Gruppe 13 Yasmin Anstruther			

*

Aufgabe 1: Galilei-Transformationen 5

Unter einer Galilei-Transformation versteht man den Übergang von einem Inertialsystem der nichtrelativistischen Physik in ein anderes. Die Koordinaten ändern sich dabei so:

$$\vec{x}' = R\vec{x} - \vec{v}\,t - \vec{x}_0\,, \qquad t' = t - t_0\,.$$

Hierbei ist R eine orthogonale (3×3)-Matrix (d.h. $R^T R = RR^T = \mathbb{1}_3$), $\vec{v}$ die Relativgeschwindigkeit der beiden Inertialsysteme, $\vec{x}_0$ ein konstanter räumlicher Verschiebungsvektor und t_0 eine Verschiebung des Ursprungs der Zeitachse.

i) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung zweier Galileitransformationen wieder eine Galileitransformation ist. *1P*

ii) Wir betrachten ein mechanisches System von N frei beweglichen Massenpunkten mit Ortsvektoren $\vec{q}_i$ und Massen m_i. Die Wechselwirkungsenergie zwischen je zwei verschiedenen Massenpunkten i, j sei $V(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|)$ für $i \neq j$. *2P*

* 16. Januar 2012 11:02 Uhr

(bitte wenden)

Geben Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen für dieses mechanische System an.

Gegeben sei nun eine Lösung $\vec{q}_1(t), \ldots, \vec{q}_N(t)$ dieser Bewegungsgleichungen. Unter einer Galilei-Transformation geht diese über in

$$\vec{q}_i'(t') = R\,\vec{q}_i(t) - \vec{v}\,t - \vec{x}_0\,, \quad i \in \{1, \ldots, N\}\,.$$

Prüfen Sie, ob die galileitransformierten Bahnkurven ebenfalls die Newtonschen Gleichungen lösen.

iii) Die Galilei-Transformation eines skalaren Feldes $f(\vec{x}, t)$ lautet *2P*

$$f'(\vec{x}', t') = f(\vec{x}, t)\,.$$

Angenommen, $f(\vec{x}, t)$ löst die Wellengleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(\vec{x}, t) = 0\,.$$

Prüfen Sie, ob das galileitransformierte Feld f' ebenfalls die Wellengleichung löst.

Aufgabe 2: Zeitdilatation und Längenkontraktion: **Ab jetzt benutzen wir SRT!** 3

i) Im Ursprung des Inertialsystems K befinde sich eine ruhende Uhr. Zu zwei Zeitangaben gehören die Ereignisse $(0, \vec{0})$ und $(cT, \vec{0})$. Welche Zeitdifferenz wird im Inertialsystem K' gemessen, welches sich relativ zu K mit der Geschwindigkeit $(v, 0, 0)$ bewegt? *1P*

ii) Im Inertialsystem K befinde sich ein ruhender Stab der Länge L. Seine Endpunkte beschreiben die Weltlinien $(ct, 0, 0, 0)$ und $(ct, L, 0, 0)$. Welche Länge misst man im Inertialsystem K'? *2P*

Aufgabe 3: Feld einer bewegten Ladung 4

Auf Blatt 10 in Aufgabe 3 wurden die Liénard–Wiechert Potentiale einer mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Ladung q berechnet. Berechnen Sie diese Potentiale auf andere Weise, indem Sie auf das Feld einer ruhenden Ladung q eine Lorentztransformation anwenden. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass die Geschwindigkeit $\vec{v} = (v, 0, 0)$ ist.

41. Aufgabe: Galilei-Transformation

(a) Wir transformieren zwei mal. Zuerst

$$(\mathbf{x}, t) \mapsto (R\mathbf{x} - \mathbf{v}t - \mathbf{x}_0, t - t_0) = (\mathbf{x}', t')$$

und dann

$$(\mathbf{x}', t') \mapsto (R'\mathbf{x}' - \mathbf{v}'t' - \mathbf{x}_0', t' - t_0') = (\mathbf{x}'', t'')$$

Es ist also

$$\mathbf{x}'' = R'\mathbf{x}' - \mathbf{v}'t' - \mathbf{x}_0' = R'(R\mathbf{x} - \mathbf{v}t - \mathbf{x}_0) - \mathbf{v}'(t - t_0) - \mathbf{x}_0' = (R'R)\mathbf{x} - (R'\mathbf{v} + \mathbf{v}')t - (R'\mathbf{x}_0 - \mathbf{v}'t_0 + \mathbf{x}_0')$$

Setze jetzt $\tilde{R} = R'R$, dann ist

$$\tilde{R}^T\tilde{R} = (R'R)^T(R'R) = R^T(R')^T R'R = R^T R = id$$

und $\tilde{R}\tilde{R}^T = id$ analog und damit $\tilde{R}$ eine orthogonale 3×3-Matrix. Setze weiterhin

$$\tilde{\mathbf{v}} = R'\mathbf{v} + \mathbf{v}' \qquad \tilde{\mathbf{x}_0} = R'\mathbf{x}_0 - \mathbf{v}'t_0 + \mathbf{x}_0'$$

Dann sind $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{x}}$ konstant nach Wahl. Für t'' gilt:

$$t'' = t' - t_0' = (t - t_0) - t_0' = t - (t_0 + t_0')$$

Setze nun

$$\tilde{t_0} = t_0 + t_0' = const.$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$(\mathbf{x}, t) \mapsto (\mathbf{x}'', t'') = (\tilde{R}\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{v}}t - \tilde{\mathbf{x}_0}, t - \tilde{t_0})$$

und somit ist eine Hintereinanderausführung zweier Galileitransformationen wieder eine Galileitransformation.

(b) Die Newtonschen Gleichungen für das ganze System lauten (für jedes $i = 1 \ldots N$):

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{q}_i(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\sum_{j \neq i}^{N} \nabla V\left(|\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t)|\right)$$

Seien die $\mathbf{q}_i(t)$ jetzt eine Lösung dieser Gleichungen. Wir transfomieren mit Galilei:

$$\mathbf{q}_i(t') \mapsto R\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{v}t - \mathbf{x}_0$$

Jetzt müssen auch für diese Gleichungen die Newtonschen Beziehungen gelten:

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{q}_i'(t')}{\mathrm{d}t'^2} = -\sum_{j \neq i}^{N} \nabla' V \left(|\mathbf{q}_i'(t') - \mathbf{q}_j'(t')| \right)$$

Betrachten wir jetzt die einzelnen Teilterme:

Differenz von $\mathbf{q}_i'$ und $\mathbf{q}_j'$: Es ist

$$|\mathbf{q}_i'(t') - \mathbf{q}_j'(t')| = |R\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{t} - \mathbf{x}_0 - R\mathbf{q}_j(t) + \mathbf{v}t + \mathbf{x}_0| = |R(\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t))|$$

Jetzt ist aber R eine orthogonale Matrix und damit die Abbildung

$$\cdot \mapsto R\cdot$$

längenerhaltend. Somit ist

$$|R(\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t))| = |\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t)|$$

Der Gradient: Es ist

$$\nabla' = R\nabla$$

aufgrund der rotiertem Definition des Koordinatensystems.

Die Beschleunigung: Wir finden:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{q}_i'(t')}{\mathrm{d}t'^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}(R\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{v}t - \mathbf{x}_0) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}(R\mathbf{q}_i(t' + t_0) - \mathbf{v}(t' + t_0) - \mathbf{x}_0)$$

$$= R\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{q}_i(t' + t_0)}{\mathrm{d}t'^2} - \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{v}(t' + t_0)}{\mathrm{d}t'^2} - \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}_0}{\mathrm{d}t'^2}$$

Die hinteren beiden Anleitungen sind beide Null, da $\mathbf{v}$ und $\mathbf{x}_0$ konstant sind. Auch die innere Ableitung von $\mathbf{q}_i(t' + t_0)$ ist 1 und damit:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{q}_i'(t')}{\mathrm{d}t'^2} = R\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{q}_i(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

nach der Kettenregel

Insgesamt ist also

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{q}_i'(t')}{\mathrm{d}t'^2} = -\sum_{j \neq i}^{N} \nabla' V \left(|\mathbf{q}_i'(t') - \mathbf{q}_j'(t')| \right)$$

äquivalent zu

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{q}_i(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\sum_{j \neq i}^{N} \nabla V \left(|\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t)| \right)$$

und damit sind auch im neuen System die Newtonschen Gleichungen erfüllt.

(c)

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}) f(\vec{x}, t) = 0$$

$$f'(\vec{x}', t') = f(\vec{x}, t)$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial f'(x',t')}{\partial t'} - (\vec{v}\nabla' f')(x', t')$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = \frac{\partial^2 f'}{\partial t'^2} - 2(\vec{v}\nabla' \frac{\partial f'}{\partial t'}) + (\vec{v} \cdot \nabla')^2 f'$$

$$\nabla^2 f(x,t) = \nabla'^2 f'(x', t')$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}) f(x,t) \\ &= (\nabla'^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}) f'(x',t') + \frac{1}{c^2}\left[2(\vec{v} \cdot \nabla' \frac{\partial f'}{\partial t}) - (\vec{v} \cdot \nabla')^2 f' \right] \end{aligned}$$

42. Aufgabe: Zeitdilatation und Längenkontraktion

(a) Wir berechnen den invarianten Abstand zwischen den beiden Ereignissen:

$$s = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$$

Da sie sich am selben Ort befinden, ist

$$s^2 = c^2 T^2$$

Wechseln wir jetzt ins Koordinatensystem K'. Diese Größe muss invariant unter diesem Wechsel sein. Hier haben die beiden Ereignisse zusätzlich zur zeitlichen Differenz $\Delta t'$ aber auch eine räumliche Differenz

$$\Delta s' = \Delta t' v$$

da sich das Koordinatensystem K (und damit auch die Uhr) relativ mit Geschwindigkeit v bewegt. Es ist also

$$s = c^2 \Delta t^2 - v^2 \Delta t^2$$

Da die beiden Größen s gleich sein müssen, kann man auflösen zu:

$$\Delta t^2 = \frac{T^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \implies \Delta t = \gamma T$$

Also wird die Zeit um den Faktor γ gedehnt.

(b) Betrachten wir den Stab im System K, so hat er (bei gleichtzeitiger Messung) die Länge L. Seien nun $x_0 = 0$ und $x_1 = L$ die Endpunkte des Stabes. Wür müssen, um die Länge zu bestimmen, im System K' wieder bei gleicher Zeit t' messen. Seien x_1' und x_0' die Endpunkte des Stabes in K'. Dann ist offensichtlich:

$$x_0 = \gamma(x_0' + vt') \qquad x_1 = \gamma(x_1' + vt')$$

und damit:

$$L = x_1 - x_0 = \gamma(x_0' - x_1') = \gamma L'$$

oder umgestellt:

$$L' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L$$

Also wird die Länge um den Faktor γ kontrahiert.

43. Aufgabe: Feld einer bewegten Ladung

Auf dem letzten Übungsblatt erhielten wir folgendes Resultat:

$$\mathbf{E} = a(c^2 - \mathbf{v}^2)(\mathbf{x} - \mathbf{R}(t)) \qquad a = \frac{qc}{\sqrt{(tc^2 - \mathbf{x}\mathbf{v})^2 + (\mathbf{x}^2 - t^2c^2)(c^2 - \mathbf{v}^2)}^3}$$

Diesmal haben wir noch die Vereinfachung:

$$\mathbf{v} = v\hat{e}_x$$

Damit wird die Gleichung zu

$$\mathbf{E} = a(c^2 - v^2)\begin{pmatrix} x - vt \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und der Vorfaktor zu

$$a = \frac{qc}{\sqrt{(tc^2 - xv)^2 + (\mathbf{x}^2 - t^2c^2)(c^2 - v^2)}^3} = \frac{qc}{\sqrt{c^4t^2 + x^2v^2 - 2c^2txv + c^2\mathbf{x}^2 - v^2\mathbf{x}^2 - c^4t^2 + c^2v^2t^2}^3}$$

Benutzen wir jetzt noch

$$\mathbf{x}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

so wird dies zu

$$a = \frac{qc}{\sqrt{c^2(x^2 + y^2 + z^2 - v^2t^2) - v^2(y^2 + z^2) - 2c^2txv}^3}$$

Betrachten wir jetzt das **E**-Feld einer Punktladung q in Ruhe im Koordinatensystem K', so ist dies gegeben durch

$$\mathbf{E}'(t') = \frac{q}{\mathbf{x}'^3}\mathbf{x}' = \frac{q}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}^3}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Nun transformieren wir in ein neues System K, das eine Relativgeschwindigkeit von v auf der x-Achse aufweist. Nach der Lorentztransformation ist dann

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Wir betrachten zuerst den Vorfaktor

$$\frac{q}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}^3} = \frac{q}{\sqrt{\frac{(x-vt)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}+y^2+z^2}^3} = \frac{q}{\sqrt{\frac{c^2(x-vt)^2}{c^2-v^2}+y^2+z^2}^3}$$

Wir erweitern den ganzen Bruch mit $(c^2-v^2)^{3/2}$ und erhalten:

$$= \frac{q(c^2-v^2)^{3/2}}{\sqrt{c^2(x-vt)^2+y^2(c^2-v^2)+z^2(c^2-v^2)}^3}$$

Die vorhandene Binomische Formel lässt sich ausrechnen und neu Klammern und man erhält schließlich:

$$\frac{q(c^2-v^2)^{3/2}}{\sqrt{c^2(x^2+y^2+z^2-v^2t^2)-v^2(y^2+z^2)-2c^2txv}^3} = \frac{a}{c}(c^2-v^2)^{3/2}$$

Wir haben also jetzt

$$\mathbf{E}' = \frac{a}{c}(c^2-v^2)(c^2-v^2)^{1/2}\begin{pmatrix}\gamma(x-vt)\\ y\\ z\end{pmatrix} = a(c^2-v^2)\gamma^{-1}\begin{pmatrix}\gamma(x-vt)\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Um jetzt von $\mathbf{E}'$ auf $\mathbf{E}$ zu kommen, benutzen wir die Lorentztransformationsregeln für Felder:

$$\mathbf{E} = \gamma\mathbf{E}' + \frac{1-\gamma}{\mathbf{v}^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}')\cdot\mathbf{E}' + \gamma\mathbf{v}\times\mathbf{B}'$$

Da das $\mathbf{B}'$-Feld 0 ist (die Ladung ist unbewegt) und die Geschwindigkeit nur in x-Richtung zeigt, vereinfach sich die Gleichung auf:

$$\mathbf{E} = \gamma\mathbf{E}' + \frac{1-\gamma}{v^2}v^2E'_x = \gamma\mathbf{E}' + (1-\gamma)E'_x$$

Also für die einzelnen Komponenten:

$$E_x = E'_x \qquad E_y = \gamma E'_y \qquad E_z = \gamma E'_z$$

Somit ist unser transformiertes **E**-Feld gegeben durch:

$$\mathbf{E} = a(c^2 - v^2)\gamma^{-1} \begin{pmatrix} \gamma(x - vt) \\ \gamma y \\ \gamma z \end{pmatrix} = a(c^2 - v^2) \begin{pmatrix} x - vt \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und damit das selbe Ergebnis wir auch schon in der vorigen Rechnung!

14. Übung

Übungen zur Theoretischen Physik III (Theorie C, Elektrodynamik), WS 2011/12

Blatt 12

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 30. 01. 12
Besprechung: 01. 02. 12

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Matthias Weinreuter	☐ Gruppe 2 Juraj Streicher	☐ Gruppe 3 Philip Wollfarth	☐ Gruppe 4 Ulf Briskot
☐ Gruppe 5 Valentin Bolsinger	☐ Gruppe 6 Robin Roth	☐ Gruppe 7 Julian Stöckel	☐ Gruppe 8 Stefan Miereis
☐ Gruppe 9 Philipp Rudo	☐ Gruppe 10 Marius Bürkle	☐ Gruppe 11 Guillaume Chalons	☐ Gruppe 12 Justus Zorn
☐ Gruppe 13 Yasmin Anstruther			

*

Aufgabe 1: Gleichförmig beschleunigtes Teilchen 6

Auf ein Teilchen mit der Ruhemasse m wirke eine konstante Kraft F_0 in x-Richtung.

i) Lösen Sie die relativistische Bewegungsgleichung *2P*

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\Big) = F_0\,,$$

wobei $\vec{v} = (v,0,0)$ (benützen Sie die Abkürzung $a = F_0/m$). Finden Sie $x(t)$ und $v(t) = dx(t)/dt$ mit den Anfangswerten $x(0) = 0$, $v(0) = 0$. Wie lauten $x(t)$ und $v(t)$ in führender Ordnung in c^{-1}, und wie lässt sich das interpretieren?

ii) Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen t und der Eigenzeit $\tau = \tau(t)$. Geben Sie x und v als Funktion der Eigenzeit τ an. *2P*

iii) Bestimmen Sie die Vierergeschwindigkeit und Viererbeschleunigung des Teilchens. Berechnen Sie die Beschleunigung, die ein mitbewegter Beobachter im System des Teilchens spürt. *2P*

*17. Januar 2012 17:38 Uhr

(bitte wenden)

Aufgabe 2: Doppler-Effekt	3

Eine Quelle emittiere ebene monochromatische elektromagnetische Wellen der Frequenz ω. Ihr Wellenvektor $\vec{k}$ sei in einem Winkel θ bezüglich der x-Achse orientiert, d.h. $k_x = |\vec{k}|\cos\theta$. Ein Beobachter bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v in Richtung der x-Achse. Berechnen Sie die Frequenz ω', die er für das Wellenfeld misst (Doppler-Effekt), sowie die Richtung, aus der die Welle zu kommen scheint (Aberrationswinkel). Hinweis: $(k^\mu) = (\omega/c, \vec{k})$ ist ein Vierervektor, d.h. er transformiert sich wie die Raum-Zeit-Koordinaten. Diskutieren Sie die Fälle $\theta = 0, \pi, \pm\pi/2$.

Aufgabe 3: Wellengleichungen	3

Unter einer Wellengleichung wollen wir eine partielle Differentialgleichung für Funktionen $f(\vec{x}, t)$ verstehen, die Lösungen der Form $\exp(-i\omega(\vec{k})t + i\vec{k}\cdot\vec{x})$ zulässt. In der Quantentheorie entsprechen den Wellen auch Teilchen und umgekehrt (z.B. Photonen für elektromagnetische Wellen). Energie und Impuls der Teilchen sind dabei gegeben durch $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, wobei $\hbar = h/(2\pi) = 1.1 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ (h ist das Plancksche Wirkungsquantum). Bestimmen Sie für die folgenden Wellengleichungen den Energie-Impuls-Zusammenhang sowie die Masse der zugehörigen Teilchen.

i) $$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\Delta\right) f(\vec{x}, t) = 0\,, \qquad \alpha > 0\,.$$ *1P*

ii) $$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \beta^2\right) f(\vec{x}, t) = 0\,, \qquad \beta \geq 0\,.$$ *2P*

44. Aufgabe: Gleichförmig beschleunigtes Teilchen

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) &= F_0 \\
\vec{v} = v\vec{e}_x, x(0) = 0, v(0) &= 0 \\
\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v &= at \\
v &= \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}} \\
x &= \int\limits_0^t \frac{at'}{\sqrt{1+\frac{a^2t'^2}{c^2}}}\,\mathrm{d}t' \\
&\overset{u=\frac{a^2t^2}{c^2}}{=} \frac{c^2}{2a}\int\limits_0^{\left(\frac{at}{c}\right)^2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u}} \\
&= \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right)
\end{aligned}$$

Taylorentwicklung für führende Ordnung c^{-1} mit

$$(1+x)^{\frac{\pm 1}{2}} \approx 1 \pm \frac{x}{2}$$

somit

$$v = at\left(1 + O(c^{-2})\right) \qquad x(t) = \frac{1}{2}at^2 + O(c^{-2})$$

(b)

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= c^2dt^2 - dx^2 \\
&= c^2dt^2 - v^2dt^2 \\
&= \frac{c^2dt^2}{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} \\
ds &= \frac{cdt}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}} = cd\tau \\
s &= c\int\limits_0^t \frac{\mathrm{dt}}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}} \\
&\overset{u=\frac{at}{c}}{=} \frac{c^2}{a}\int\limits_0^{\frac{at}{c}} \frac{\mathrm{du}}{\sqrt{1+u^2}} \\
&= \frac{c^2}{a}\ \text{arcsinh}\left(\frac{at}{c}\right) \\
\tau &= \frac{s}{c} = \frac{c}{a}\ \text{arcsinh}\left(\frac{at}{c}\right) \\
t(\tau) &= \frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right)
\end{aligned}
$$

Somit folgt

$$
\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} = \sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{at}{c}\right)} = \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right)
$$

Damit

$$
v(\tau) = c\tanh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \qquad x(\tau) = \frac{c^2}{a}\left(\cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) - 1\right)
$$

(c) Es gilt

$$
u^\mu(\tau) = \frac{\partial x^\mu(\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(ct(\tau), x(\tau), 0, 0\right)
$$

Somit

$$
\begin{aligned}
u^\mu(\tau) &= c\left(\cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right), \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right), 0, 0\right) \\
a^\mu(\tau) &= \frac{\partial u^\mu}{\partial\tau} = a\left(\sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right), \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right), 0, 0\right)
\end{aligned}
$$

Wir wollen jetzt das Koordinatensystem betrachten, in dem ein Beobachter ruht, für den also die Vierergeschwindigkeit gerade

$$u'^{\mu} = (ct', 0, 0, 0)$$

beträgt. Dazu betrachten wir eine Transformation

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

. Die gewünschte Transformationsmatrix ist in der 0ten und ersten Komponente

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) & -\sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \\ -\sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) & \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \end{pmatrix}$$

Damit

$$\begin{aligned} u'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu} u^{\nu} \\ &= c \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) & -\sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \\ -\sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) & \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \\ \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \end{pmatrix} \\ &= c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

45. Aufgabe: Doppler-Effekt

$K^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right), |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}, k_x = \frac{\omega}{c}\cos\theta$.
Also

$$
\begin{aligned}
K'^{\mu} &= \left(\frac{\omega'}{c}, k'_x, k'_y, k'_z\right) \\
\frac{\omega'}{c} &= \gamma\frac{\omega}{c} - \beta\gamma k_x \\
&= \gamma\frac{\omega}{c} - \beta\gamma\frac{\omega}{c}\cos\theta \\
k'_x &= -\beta\gamma\frac{\omega}{c} + \gamma k_x \\
&= -\beta\gamma\frac{\omega}{c} + \gamma\frac{\omega}{c}\cos\theta \\
\omega' &= \omega\gamma\left(1 - \beta\cos\theta\right) \\
k'_x &= \frac{\omega'}{c}\cos\theta' \\
&= \frac{\gamma\omega}{c}\left(-\beta + \cos\theta\right) \\
cos\theta' &= \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}
\end{aligned}
$$

Betrachte nun

$$\theta = 0$$

$$
\begin{aligned}
\omega' &= \omega\frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} \\
\theta' &= 0
\end{aligned}
$$

Nun

$$\theta = \pi$$

$$
\begin{aligned}
\omega' &= \omega\frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} \\
\theta' &= \pi
\end{aligned}
$$

Nun

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega' = \gamma\omega$$
$$\cos\theta' = -\beta \implies \theta' > \frac{\pi}{2}$$

46. Aufgabe: Wellengleichung

(a)

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\Delta\right) f(\vec{x},t) = 0$$
$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\Delta\right) \exp\left(-i\omega(\vec{k})t + i\vec{k}\vec{x}\right) = 0$$
$$= \left(\omega - \alpha k^2\right) \exp\left(-i\omega(\vec{k})t + i\vec{k}\vec{x}\right)$$

Also
$$\omega = \alpha\vec{k}^2$$

Verwende nun
$$E = \frac{p^2}{2m} \implies m = \frac{p^2}{2E} = \frac{p^2}{2\hbar\omega} = \frac{\hbar}{2\alpha}$$

(b)

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta + \beta^2\right) f(\vec{x},t) = 0$$
$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta + \beta^2\right) \exp\left(-i\omega(\vec{k})t + i\vec{k}\vec{x}\right) = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 + \beta^2\right) \exp\left(-i\omega(\vec{k})t + i\vec{k}\vec{x}\right)$$
$$\frac{E}{c^2} = \vec{p}^2 + \hbar^2\beta^2$$
$$\frac{E^2}{c^2} = \vec{p}^2 + m^2c^2$$
$$\implies m = \frac{\beta\hbar}{c}$$

15. Übung

Übungen zur Theoretischen Physik III (Theorie C, Elektrodynamik), WS 2011/12

Blatt 13 (Bonus)

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S.Thambyahpillai
Institut für Theoretische Physik

Abgabe: 06. 02. 12
Besprechung: 08. 02. 12

Name: ....

Bitte die Gruppe ankreuzen und dieses Blatt mit abgeben (bitte tackern):

☐ Gruppe 1 Matthias Weinreuter	☐ Gruppe 2 Juraj Streicher	☐ Gruppe 3 Philip Wollfarth	☐ Gruppe 4 Ulf Briskot
☐ Gruppe 5 Valentin Bolsinger	☐ Gruppe 6 Robin Roth	☐ Gruppe 7 Julian Stöckel	☐ Gruppe 8 Stefan Miereis
☐ Gruppe 9 Philipp Rudo	☐ Gruppe 10 Marius Bürkle	☐ Gruppe 11 Guillaume Chalons	☐ Gruppe 12 Justus Zorn
☐ Gruppe 13 Yasmin Anstruther			

*

Bitte beachten Sie: Bei den Punkten, die Sie auf dem aktuellen Übungsblatt erreichen können, handelt es sich um Bonuspunkte. Diese fließen nur optional in die Bewertung ein, sprich, die Abgabe einer Lösung ist freiwillig.

Aufgabe 1: Compton-Effekt — 4

Ein Photon ist ein Teilchen mit Ruhemasse Null, Energie $E = \hbar\omega$ und Impulsbetrag $|\vec{q}| = \hbar\omega/c$. Ein Photon mit Frequenz ω_0 und Impuls $\vec{q}_0$ werde an einem ruhenden freien Elektron der Masse m gestreut. Nach dem Stoß habe das Photon die Frequenz ω_1 und den Impuls $\vec{q}_1$, der mit dem ursprünglichen Impuls $\vec{q}_0$ den Winkel θ einschließt. Das Elektron habe nach dem Stoß den Impuls $\vec{p}$. Bestimmen Sie die Frequenz ω_1 des gestreuten Photons in Abhängigkeit von ω_0, m und θ.

Aufgabe 2: Elementarteilchenprozesse — 4

i) Zeigen Sie, dass das Endprodukt eines Elementarteilchenprozesses, bei dem zwei verschiedene massive Teilchen miteinander kollidieren, niemals ein einzelnes Photon sein kann. *2P*

*20. Januar 2012 13:52 Uhr

(bitte wenden)

ii) Ein ruhendes Teilchen der Masse M zerfällt in ein Teilchen der Masse m und ein Photon. Berechnen Sie die Energie des Photons. *2P*

Aufgabe 3: Kovariante Formulierung der Elektrodynamik 4

i) Die kovariante Form der Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes lautet *1P*

$$\mathcal{L}(A_\rho, \partial_\sigma A_\rho) = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} A_\mu j^\mu \,,$$

wobei j^μ eine von außen vorgegebene Vierer-Stromdichte ist. Leiten Sie mit Hilfe der Euler-Lagrangegleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = 0 \,,$$

die Bewegungsgleichungen her. Verwenden Sie die Lorenzeichung, um die Bewegungsgleichungen als Wellengleichung für A_μ zu schreiben.

Zeigen Sie, dass die Wirkung $S = \int \mathrm{d}^4x \, \mathcal{L}$ eichinvariant ist.

ii) Der *Energie-Impuls-Tensor* des elektromagnetischen Feldes ist gegeben durch *1P*

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda} \right) .$$

Zeigen Sie, dass in Abwesenheit von Strömen und Ladungen gilt: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

iii) Drücken Sie die Komponenten T^{00}, T^{0i}, T^{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ durch $\vec{E}$, $\vec{B}$ aus. *1P*

iv) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ den Poyntingschen Satz und die Impulserhaltung für freie Felder beinhaltet. *1P*

47. Aufgabe: Compton-Effekt

Vor dem Stoß

$$q_0^\mu = (\frac{\hbar\omega_0}{c}, \vec{q}_0) \qquad P_0^\mu = (mc, 0)$$

Nach dem Stoß

$$q_1^\mu = (\frac{\hbar\omega_1}{c}, \vec{q}_1) \qquad P_1^\mu = (\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}, \vec{p})$$

Mit

$$|\vec{q}_0| = \frac{\omega_0}{c} \qquad |\vec{q}_1| = \frac{\omega_1}{c}$$

Viererimpulserhaltung liefert

$$P_0^\mu + q_0^\mu = P_1^\mu + q_1^\mu$$

und somit

$$\begin{aligned}
mc + \frac{\hbar\omega_0}{c} &= \sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2} + \frac{\hbar\omega_1}{c} \\
\vec{p} &= \vec{q}_0 - \vec{q}_1 \\
\vec{p}^2 = \frac{\hbar^2}{c^2}\left(\omega_0^2 + \omega_1^2 - 2\omega_0\omega_1\cos\theta\right) & \\
m^2c^2 + \frac{\hbar^2}{c^2}\left(\omega_0^2 + \omega_1^2 - 2\omega_0\omega_1\cos\theta\right) &= \left[mc + \frac{\hbar}{c}(\omega_0 - \omega_1)\right]^2 \\
\omega_1 &= \frac{\omega_0}{\frac{\hbar\omega_0}{mc^2}(1 - \cos\theta) + 1}
\end{aligned}$$

48. Aufgabe: Elementarteilchenprozesse

(i) Viererimpulserhaltung ergibt

$$\left(\sqrt{c^2m^2 + \vec{p}^2}, \vec{p}\right) + \left(\sqrt{c^2M^2 + \vec{q}^2}, \vec{q}\right) = \left(|\vec{k}|, \vec{k}\right)$$

Im Schwerpunktsystem gilt $\vec{q} = -\vec{p}$ und damit

$$\sqrt{c^2m^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{c^2M^2 + \vec{p}^2} = 0$$

da $\vec{k} = 0$

(ii) Es gilt wieder Viererimpulserhaltung

$$\left(cM, \vec{0}\right) = \left(\sqrt{c^2m^2 + \vec{p}^2}, \vec{p}\right) + (|\vec{p}|, \vec{p})$$

und somit müssen wir nur die 0te Kompoenente betrachten.
Umgeformt steht dann da

$$(cM - |\vec{p}|)^2 = c^2m^2 + \vec{p}^2$$

und für die Energie des Photons gilt $E = c|\vec{p}|$ und damit folgt aus der Gleichung

$$E = \frac{c^2(M^2 - m^2)}{2M}$$

49. Aufgabe: Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

(i)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = 0$$

Es folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -\frac{1}{c} J^\mu$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} =$$

Zwischenschritte

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial \partial_\mu A_\nu} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right) \\
&= \left(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha\right) \\
\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} &= F^{\alpha\beta} \left(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha\right) \\
&= F_{\alpha\beta} \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}\right) \\
&= F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} + F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} \\
&= 2\left(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}\right) \qquad \overset{Antisymmetrie}{=} 4F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Also

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu$$

Mit Lorentzeichung folgt $\partial_\mu A^\mu = 0$ und damit

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu$$

Nun gehts an die Eichinvarianz :
Sei

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \omega$$

Damit

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu\omega - \partial_\nu\partial_\mu\omega = F_{\mu\nu}$$

Somit für die Wirkung

$$\begin{aligned} S' &= \int \mathrm{d}^4\mathrm{x}\mathcal{L}' \\ &= \int \mathrm{d}^4\mathrm{x}\left(\mathcal{L} - \frac{1}{c}\partial_\mu\omega J^\mu\right) \\ &= S + \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4\mathrm{x}\omega\partial_\mu J^\mu \\ &= S \end{aligned}$$

(ii) Zu Zeigen

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

bei fehlenden Strömen und Ladungen

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\partial_\mu F^\mu_\lambda F^{\lambda\nu} + F^\mu_\lambda \partial_\mu F^{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\partial^\mu F_{\rho\lambda}F^{\lambda\rho}\right)$$

Mit

$$
\begin{aligned}
F^{\mu}_{\nu} &= g^{\mu\nu} F_{\nu\lambda} \\
6 = \partial^{\mu} A_{\lambda} - \partial_{\lambda} A^{\mu} \\
\partial_{\mu} F^{\mu}_{\lambda} &= \partial_{\mu}\partial^{\mu} A_{\lambda} - \partial_{\mu}\partial_{\lambda} A^{\mu} \\
&= \partial_{\mu}\partial^{\mu} A_{\lambda} - \partial_{\mu}\partial^{\mu} A_{\lambda} g_{\mu\lambda} g^{\mu\lambda} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Weiter gehts :

$$
\begin{aligned}
\partial_{\mu} T^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} F_{\rho\lambda} \left(\partial^{\rho} F^{\lambda\nu} + \frac{1}{2} \partial^{\nu} F^{\rho\lambda} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} F_{\rho\lambda} \left(\frac{1}{2} \partial^{\rho} F^{\lambda\nu} - \frac{1}{2} \partial^{\rho} F^{\nu\lambda} + \frac{1}{2} \partial^{\nu} F^{\rho\lambda} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} F_{\rho\lambda} \left(\frac{1}{2} \partial^{\rho} F^{\lambda\nu} + \frac{1}{2} \partial^{\lambda} F^{\nu\rho} + \frac{1}{2} \partial^{\nu} F^{\rho\lambda} \right) \\
\partial_{\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0
\end{aligned}
$$

Mit

$$
\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}
$$

Wobei

$$
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} \partial_{\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\mu} F_{\rho\sigma}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} \varepsilon^{\mu\rho\sigma\nu} &= \delta^{\mu}_{\alpha} \left(\delta^{\rho}_{\beta} \delta^{\sigma}_{\gamma} - \delta^{\beta}_{\sigma} \delta^{\sigma}_{\rho} \right) \\
&+ \delta^{\rho}_{\alpha} \left(-\delta^{\mu}_{\beta} \delta^{\sigma}_{\gamma} + \delta^{\mu}_{\gamma} \delta^{\nu}_{\beta} \right) \\
&+ \delta^{\alpha}_{\sigma} \left(\delta^{\mu}_{\beta} \delta^{\beta}_{\gamma} - \delta^{\mu}_{\gamma} \delta^{\rho}_{\beta} \right)
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
F_{0i} &= \partial_0 A_i - \partial_i \phi \\
&= E_i \\
F_{0i} &= -F_{i0} = F^{i0} \\
\varepsilon_{ijk} F^{jk} & \\
&= -\left(\varepsilon_{ijk}\left(\partial^i A^k - \partial^k A^j\right)\right) \\
&= -2\varepsilon_{ijk}\partial^j A^k \\
&= -2B_i \\
F^{jk} &= -\varepsilon_{jkl} B_l \\
T^{00} &= \frac{1}{4}\left(F^0_\lambda F^{\lambda 0} + \frac{1}{4}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(E_i E_i - \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)\right) \\
T^{0i} &= \frac{1}{4\pi}\left(F^0_\lambda F^{\lambda i}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi} E_k F^{ki} \\
&= -\frac{1}{4\pi} E_k \varepsilon_{kil} B_l \\
T^{ij} &= \frac{1}{4\pi}\left(F^i_k F^{kj} + F^i_0 F^{0j} - \partial_{ij}\frac{1}{4}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(-\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{kjm} B_l B_m - E_i E_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\left(\delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) B_l B_m - E_i E_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right) \\
T^{ij} &= \frac{1}{4\pi}\left(-B_i B_j - E_i E_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

Wir haben also T^{00} die Energiedichte, $T^{0i}, i = 1, 2, 3$ als den Poyntingvektor durch c und T^{ij} als Spannungstensor , $i, j = 1, 2, 3$

(iv)

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Bezeichne

$$U = T^{00} \qquad S_i = cT^{0i}$$

Bei $\nu = 0$ folgt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \cdot \vec{S} \right) = 0$$

und für $\nu = k$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial S_k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^j} T_{jk}^{(M)} = 0$$

wobei $T^{(M)}$ den Maxwellschen Spannungstensor angibt.