Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III
(Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Igor Gornyi

Blatt 1
Besprechung 17.10.2012

---

1. Nabla-Kalkül: (14+6+8+4+4=36 Punkte)

Auf diesem Übungsblatt verwenden wir die folgenden Symbole:

$$\vec{\nabla} f \equiv \mathrm{grad} f, \quad \vec{\nabla}\vec{v} \equiv \mathrm{div}\vec{v}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv \mathrm{rot}\vec{v}; \quad \vec{\nabla}^2 \equiv \Delta$$

a. Finden Sie (mit $r = |\vec{r}|$)

$$\vec{\nabla} r, \quad \vec{\nabla}\vec{r}, \quad \vec{\nabla}\,\frac{1}{r}, \quad \vec{\nabla}\,\frac{1}{r^3}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{r}, \quad \vec{\nabla} f(r), \quad \vec{\nabla}\times\left[f(\vec{r})\,\frac{\vec{r}}{r}\right].$$

b. Berechnen Sie

$$\vec{\nabla}\left(e^{i\vec{k}\vec{r}}\right), \quad \vec{\nabla}\left(\vec{d}\,e^{i\vec{k}\vec{r}}\right), \quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{d}\,e^{i\vec{k}\vec{r}}\right),$$

wobei $\vec{k}$ und $\vec{d}$ die konstante Vektoren sind.

c. Rechnungen, die in der Elektrodynamik auftreten, verwenden oft folgende Identitäten. Zeigen Sie, dass

- $\vec{\nabla}(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{w}(\vec{\nabla}\times\vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla}\times\vec{w})$
- $\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}(\vec{\nabla}\vec{w}) - \vec{w}(\vec{\nabla}\vec{v}) + (\vec{w}\vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{w}$
- $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = 0$
- $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{v}) - \Delta\vec{v}$

gilt, wobei $\vec{v}(\vec{r})$ und $\vec{w}(\vec{r})$ die Vektorfunktionen sind.

d. Bestimmen Sie die folgende Produktregeln [$f(\vec{r}):\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ – Skalarfunktion , $\vec{v}(\vec{r}):\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – Vektorfunktion]:

- $\vec{\nabla}(f\vec{v}) = \vec{v}(\vec{\nabla} f) + f\vec{\nabla}\vec{v}$
- $\vec{\nabla}\times(f\vec{v}) = -\vec{v}\times(\vec{\nabla} f) + f\vec{\nabla}\times\vec{v}$

e. Bestimmen Sie die folgende Kettenregeln [$f(\vec{r}):\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ – Skalarfunktion, $\vec{P}(f):\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ – Vektorfeld auf $\mathbb{R}$]:

- $\vec{\nabla}\vec{P}(f(\vec{r})) = \dot{\vec{P}}(f(\vec{r}))\vec{\nabla} f(\vec{r})$
- $\vec{\nabla}\times\vec{P}(f(\vec{r})) = -\dot{\vec{P}}(f(\vec{r}))\times(\vec{\nabla} f(\vec{r}))$

mit $\dot{\vec{P}}(f) = \partial\vec{P}/\partial f$