

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III
(Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13**Prof. Dr. Alexander Mirlin**
Dr. Igor Gornyi**Blatt 1: Lösungen**
Besprechung 17.10.2012**1. Nabla-Operator**

In kartesischen Koordinaten $x_i = (x, y, z)$ ist der Nabla-Operator definiert als:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \partial_i = \vec{e}_i \partial_i \quad (1)$$

wobei wir die partielle Ableitung definiert haben als:

$$\partial_i = \partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2)$$

und wir in Zukunft die Einstein'sche Summenkonvention verwenden. Hierbei wird über doppelt auftretende Indizes automatisch von 1-3 summiert.

Nabla-Operator in beliebigen (rechtwinkligen) Koordinatensystemen

Wir wollen nun unser System nicht in kartesischen Koordinaten $\vec{x} = (x, y, z)$, sondern durch andere Koordinaten $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ((z.B. Kugel- oder Zylinderkoordinaten) darstellen. Der Ortsvektor soll also durch:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ y(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ z(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \end{pmatrix} \quad (3)$$

dargestellt werden. Als Beispiel seien Kugelkoordinaten erwähnt:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \sin \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4)$$

Wir wollen den Nabla-Operator nun in diesen Koordinaten schreiben, also mache den Ansatz:

$$\vec{\nabla} = \sum_i \vec{e}_i \partial_i = \sum_i \vec{e}_{\theta_i} c_i \quad (5)$$

wobei c_i eine Ableitung ∂_{θ_i} enthalten soll und die neuen normierten Einheitsvektoren geschrieben werden können als:

$$\vec{e}_{\theta_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta_i} \quad \text{mit } h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta_i} \right| \quad (6)$$

Wir nehmen des weiteren an, dass die Koordinaten lokal senkrecht sind, die $\vec{e}_{\theta_i}$ also alle senkrecht aufeinander stehen (was sie im Falle der wichtigen Koordinaten wie Polar-, Kugel- und Zylinderkoordinaten auch sind), also:

$$\vec{e}_{\theta_i} \cdot \vec{e}_{\theta_j} = \delta_{ij} \quad (7)$$

Wir wollen nun die c_i bestimmen, was wir mit Hilfe von (7) einfach machen können, indem wir (5) mit $\vec{e}_{\theta_j}$ multiplizieren:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{\theta_j} \cdot \sum_i \vec{e}_{\theta_i} c_i &= \vec{e}_{\theta_j} \vec{\nabla} \\ c_j &= \vec{e}_{\theta_j} \vec{\nabla} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta_j} \vec{\nabla} = \frac{1}{h_j} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{h_j} \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{h_j} \partial_{\theta_j} \end{aligned} \quad (8)$$

wobei wir für den letzten Schritt einfach die Wirkung von ∂_{θ_i} auf eine Funktion $f(\vec{x})$ betrachten müssen:

$$\partial_{\theta_j} f(\vec{x}) = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \theta_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Es gilt mit (5) und (8) nun also:

$$\vec{\nabla} = \sum_i \vec{e}_{\theta_i} \frac{1}{h_i} \partial_{\theta_i} \quad (9)$$

Als Beispiel betrachten wir nun Kugelkoordinaten. Hier gilt mit nach einfachen Rechnungen mit (4) und (6):

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} & h_r &= 1 \\ \vec{e}_\phi &= \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} & h_\phi &= r \sin \theta \\ \vec{e}_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} & h_\theta &= r \end{aligned}$$

Sodass wir bekommen:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \cdot \partial_r + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta \quad (10)$$

2. Levi-Cevita-Symbol / ϵ -Tensor

Wir definieren den ϵ -Tensor als:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } ijk = 123 = 312 = 231 = \text{gerade Permutation von } 123 \\ -1 & \text{für } ijk = 321 = 132 = 213 = \text{gerade Permutation von } 123 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (11)$$

Der Tensor ist antisymmetrisch unter der Vertauschung zweier beliebiger Indizes:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj} \quad (12)$$

Mit dem ϵ -Tensor können wir das Kreuzprodukt schreiben als:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{e}_i \cdot \epsilon_{ijk} a_j b_k \\ (\vec{a} \times \vec{b})_i &= \epsilon_{ijk} a_j b_k \end{aligned} \quad (13)$$

Zusätzlich geben wir noch eine wichtige Eigenschaft an:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \quad (14)$$

3. Nabla-Kalkül

a. Es gilt (mit $r = |\vec{r}|$):

•

$$\vec{\nabla} r = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (15)$$

Wir sehen also, dass gilt:

$$\partial_i r = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \quad (16)$$

Da wir im Folgenden die Indexschreibweise üben wollen, machen wir diese Aufgabe nochmal etwas anders:

$$\vec{\nabla} r \stackrel{(1)}{=} \vec{e}_i \partial_i r \stackrel{(16)}{=} \vec{e}_i \frac{x_i}{r} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (17)$$

wobei wir genutzt haben, dass gilt:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x_i\vec{e}_i \quad (18)$$

•

$$\vec{\nabla} \vec{r} = \vec{e}_i \partial_i x_j \vec{e}_j = \vec{e}_i \delta_{ij} \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i}_{=1} = \sum_{i=1}^3 1 = 3 \quad (19)$$

Hier haben wir am Ende die Summe doch noch mal explizit hingeschrieben, sodass wir sehen, dass wir noch 3 mal über die 1 summieren müssen. Des weiteren gilt natürlich:

$$\partial_i x_j = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \quad (20)$$

da gilt.:

$$\begin{aligned} \partial_x x &= \partial_y y = \partial_z z = 1 \\ \partial_x y &= \partial_x z = \partial_y x = \partial_y z = \partial_z x = \partial_z y = 0 \end{aligned}$$

•

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = \vec{e}_i \partial_i \frac{1}{r} = \vec{e}_i \frac{\partial(\frac{1}{r(x,y,z)})}{\partial x_i} = \vec{e}_i \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \stackrel{(16)}{=} \vec{e}_i \left(-\frac{1}{r^2}\right) \frac{x_i}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (21)$$

wobei wir hier die Kettenregel verwendet haben, da $r = r(\vec{r}) = r(x, y, z)$ eine Funktion der Variablen ist, nach der abgeleitet wird.

•

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r^3} = \vec{e}_i \partial_i \frac{1}{r^3} = \vec{e}_i \frac{\partial(\frac{1}{r^3})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \stackrel{(16)}{=} \vec{e}_i \left(-3\frac{1}{r^4}\right) \frac{x_i}{r} = -3\frac{\vec{r}}{r^5} \quad (22)$$

•

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \partial_y z - \partial_z y \\ \partial_z x - \partial_x z \\ \partial_x y - \partial_y x \end{pmatrix} = 0 \quad (23)$$

oder auch:

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j x_k \stackrel{(20)}{=} \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \delta_{jk} = \vec{e}_i \epsilon_{ijj} \stackrel{(11)}{=} 0 \quad (24)$$

•

$$\vec{\nabla} f(r) = \vec{e}_i \partial_i f(r) = \vec{e}_i \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \stackrel{(16)}{=} \vec{e}_i f'(r) \frac{x_i}{r} = f'(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad (25)$$

•

$$\vec{\nabla} \times \left[f(\vec{r}) \underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{\hat{=}\vec{v}} \right] \stackrel{(43)}{=} (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \times \frac{\vec{r}}{r} + f(\vec{r}) [\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r}] \quad (26)$$

$$= -\frac{\vec{r}}{r} \times [\vec{\nabla} f(\vec{r})] + f(\vec{r}) [\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r}]. \quad (27)$$

Wir berechnen nun:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r} &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \frac{x_k}{r} = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \left[\frac{\partial_j x_k}{r} + x_k \partial_j \frac{1}{r} \right] = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \left[\frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{x_k x_j}{r^2} \right] \\ &= \vec{e}_i \epsilon_{ijj} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \vec{e}_i \underbrace{\epsilon_{ijk} x_j x_k}_{\substack{=\text{antisym. unter} \\ \text{Vertauschung von } j \text{ und } k}} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Der erste Term verschwindet, weil $\epsilon_{ijj} = 0$, der zweite Term weil die Summe über (j, k) über einen asymmetrischen Term 0 ergibt. Dies wollen wir noch kurz allgemein beweisen. Wir betrachten die Doppelsumme:

$$\sum_{j,k} A_{jk}$$

mit einem antisym. Term:

$$A_{jk} = -A_{kj} \quad \rightarrow \quad A_{jj} = -A_{jj} = 0$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} A_{jk} &= \sum_{j < k} A_{jk} + \sum_{j=k} A_{jk} + \sum_{k < j} A_{jk} = \sum_{j < k} A_{jk} + \sum_j A_{jj} + \sum_{k < j} A_{jk} \\ &= \sum_{j < k} A_{jk} - \sum_{k < j} A_{kj} \end{aligned}$$

Im zweiten Term benennen wir nun die Indizes einfach um $j \rightarrow k, k \rightarrow j$ und bekommen:

$$\sum_{j,k} A_{jk} = \sum_{j < k} A_{jk} - \sum_{j < k} A_{jk} = 0 \quad (29)$$

Kommen wir zurück zu Gleichung (27). Mit Hilfe von (28) folgt nun einfach:

$$\vec{\nabla} \times \left[f(\vec{r}) \frac{\vec{r}}{r} \right] = -\frac{\vec{r}}{r} \times [\vec{\nabla} f(\vec{r})] \quad (30)$$

b. •

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(e^{i\vec{k}\vec{r}}) &= \vec{e}_i \partial_i e^{i\vec{k}\vec{r}} = \vec{e}_i \frac{\partial(e^{i\vec{k}\vec{r}})}{\partial(i\vec{k}\vec{r})} \frac{\partial(i\vec{k}\vec{r})}{\partial x_i} = \vec{e}_i e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{\partial(ik_j x_j)}{\partial x_j} \stackrel{(20)}{=} \vec{e}_i e^{i\vec{k}\vec{r}} ik_j \delta_{ij} \\ &= \vec{e}_i e^{i\vec{k}\vec{r}} ik_i = i\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}} \end{aligned} \quad (31)$$

•

$$\vec{\nabla}(\vec{d}e^{i\vec{k}\vec{r}}) \stackrel{(42)}{=} \underbrace{(\vec{\nabla}\vec{d})}_{=0} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \vec{d}(\vec{\nabla}e^{i\vec{k}\vec{r}}) \stackrel{(31)}{=} \vec{d}(i\vec{k}e^{i\vec{k}\vec{r}}) = i\vec{d}\vec{k}e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad (32)$$

•

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{d}e^{i\vec{k}\vec{r}}) &= \vec{\nabla} \times (e^{i\vec{k}\vec{r}} \vec{d}) \stackrel{(43)}{=} (\vec{\nabla}e^{i\vec{k}\vec{r}}) \times \vec{d} + e^{i\vec{k}\vec{r}} \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{d})}_{=0} \\ &\stackrel{(31)}{=} (i\vec{k}e^{i\vec{k}\vec{r}}) \times \vec{d} = i(\vec{k} \times \vec{d})e^{i\vec{k}\vec{r}} \end{aligned} \quad (33)$$

Effektiv sehen wir, dass immer nur $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ gesetzt werden muss. $\vec{\nabla}$ wirkt also ähnlich auf Funktionen $f(\vec{r})$ wie eine normale Ableitung ∂_x auf eine Funktion $f(x)$.

c. •

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(\vec{v} \times \vec{w}) &= \partial_i(\vec{v} \times \vec{w})_i = \partial_i \epsilon_{ijk} v_j w_k = \epsilon_{ijk} [w_k (\partial_i v_j) + v_j (\partial_i w_k)] \\
&= w_k \epsilon_{kij} \partial_i v_j - v_j \epsilon_{jik} \partial_i w_k = w_k (\vec{\nabla} \times \vec{v})_k - v_j (\vec{\nabla} \times \vec{w})_j \\
&= \vec{w}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla} \times \vec{w})
\end{aligned} \tag{34}$$

•

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{v} \times \vec{w})_k = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{kmn} v_m w_n \\
&= \vec{e}_i \underbrace{\epsilon_{kij} \epsilon_{kmn}}_{\stackrel{(14)}{=} \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}} \partial_j (v_m w_n) = \vec{e}_i [\partial_j (v_i w_j) - \partial_j (v_j w_i)] \\
&= \partial_j (\vec{v} w_j) - \partial_j (v_j \vec{w}) = \vec{v} \partial_j w_j + w_j \partial_j \vec{v} - \vec{w} \partial_j v_j - v_j \partial_j \vec{w} \\
&= \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{w}) + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{w}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}
\end{aligned} \tag{35}$$

wobei wir am Ende die Klammern gesetzt haben um kenntlich zu machen, wo das Skalarprodukt ist.

•

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \partial_i (\vec{\nabla} \times \vec{v})_i = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j v_k = \underbrace{\epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j v_k}_{\text{antisym. unter } i \leftrightarrow j} \stackrel{(29)}{=} 0 \tag{36}$$

Diese Relation wird sich als wichtig herausstellen, um eine der 4 Maxwell-Gleichungen herzuleiten. Da nämlich gilt $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ mit dem Vektorpotential $\vec{A}$, bekommen wir:

$$\vec{\nabla} \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \stackrel{(36)}{=} 0 \tag{37}$$

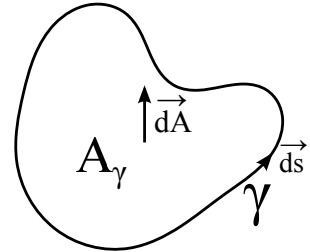
Eine ähnliche Relation ist:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = 0 \tag{38}$$

Welche zeigt, dass die Rotation von Potentialfeldern verschwindet. Ist ein Feld $\vec{F}$ also ein Potentialfeld, so lässt es sich ja durch $\vec{F} = \vec{\nabla} \phi$ darstellen und es gilt dann:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0 \tag{39}$$

Mit dem Integralsatz von Stokes können wir nun auch zeigen, dass die Arbeit eines solchen Feldes auf einem geschlossenen Weg 0 ist:

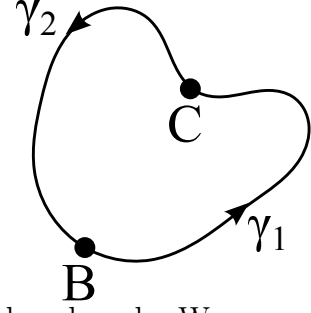


$$W_o = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{A_{\gamma}} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) d\vec{A} = \oint_{A_{\gamma}} \underbrace{(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi))}_{=0} d\vec{A} = 0 \tag{40}$$

womit auch gezeigt ist, dass die Arbeit für Potentialfelder wegunabhängig ist, da wir den Weg A_{γ} auch in 2 Wege aufteilen können:

$$0 = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{-\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



Da γ_1 von B bis C geht und γ_2 von C bis B, ist es klar, dass der Weg $-\gamma_2$ (also richtungsumgekehrt) auch wieder von B bis C geht. Somit haben wir zwei unterschiedliche Wege von B bis C, welche dieselbe Arbeit geben. Da diese Wege beliebig sind, folgt die Wegunabhängigkeit der Arbeit bei Potentialfeldern.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{\nabla} \times \vec{v})_k = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{kmn} \partial_m v_n = \vec{e}_i \epsilon_{kij} \epsilon_{kmn} \partial_j \partial_m v_n \\ &\stackrel{(14)}{=} \vec{e}_i (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \partial_j \partial_m v_n = \vec{e}_i (\partial_j \partial_i v_j - \partial_j \partial_j v_i) \\ &= \vec{\nabla} \partial_j v_j - \partial_j \partial_j \vec{v} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v} \end{aligned} \quad (41)$$

d. •

$$\vec{\nabla}(f\vec{v}) = \partial_i(f\vec{v})_i = \partial_i(fv_i) = (\partial_i f)v_i + f(\partial_i v_i) = (\vec{\nabla} f)\vec{v} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (42)$$

wobei gilt, dass wenn eine Klammer um einen Ausdruck mit Ableitung steht, diese Ableitung nicht mehr auf das wirkt, was hinter der Klammer steht, sondern nur auf die Ausdrücke in der Klammer:

$$(\vec{\nabla} f)\vec{v} \equiv \vec{v}\vec{\nabla} f, \quad (\vec{\nabla} f) \times \vec{v} \equiv -\vec{v} \times \vec{\nabla} f$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (f\vec{v}) &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (f\vec{v})_k = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j (fv_k) = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} [(\partial_j f)v_k + f(\partial_j v_k)] \\ &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} (\partial_j f)v_k + f \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j v_k = (\vec{\nabla} f) \times \vec{v} + f(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \\ &= -\vec{v} \times \vec{\nabla} f + f(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \end{aligned} \quad (43)$$

e. •

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{P}(f(\vec{r})) &= \vec{e}_i \partial_i \vec{P}(f(\vec{r})) = \vec{e}_i \frac{\partial \vec{P}(f(\vec{r}))}{\partial f(\vec{r})} \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_i} = \vec{e}_i \dot{\vec{P}}(f(\vec{r})) \partial_i f(\vec{r}) \\ &= \dot{\vec{P}}(f(\vec{r})) (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \end{aligned} \quad (44)$$

wobei:

$$\dot{\vec{P}}(f(\vec{r})) = \frac{\partial \vec{P}(f(\vec{r}))}{\partial f(\vec{r})} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{P}(f(\vec{r})) &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j P_k(f(\vec{r})) = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \frac{\partial P_k(f(\vec{r}))}{\partial f(\vec{r})} \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_j} = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \dot{P}_k(f(\vec{r})) \partial_j f(\vec{r}) \\ &= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} (\vec{\nabla} f(\vec{r}))_j \dot{P}_k(f(\vec{r})) = (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \times \dot{\vec{P}}(f(\vec{r})) \\ &= -\dot{\vec{P}}(f(\vec{r})) \times (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \end{aligned} \quad (46)$$