KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III (Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13

Prof. Dr. Alexander Mirlin

Dr. Igor Gornyi

Blatt 2

Besprechung 24.10.2012

---

1. Dirac'sche Deltafunktion: (4+3+1+1+2=11 Punkte)

Die Dirac'sche Deltafunktion $\delta(x)$ hat die Eigenschaft $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$. Für beliebige (hinreichend glatte) Funktionen $f(x)$ gilt

$$\int_a^b dx \; f(x) \; \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls} \quad x_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere gilt die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \delta(x - x_0) = 1.$$

Es gibt viele Möglichkeiten, die Deltafunktion durch einen Grenzübergang aus "gewöhnlichen" Funktionen zu konstruieren.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Deltafunktion darstellen lässt durch

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\epsilon \to 0} L_\epsilon(x - x_0) \quad \text{mit} \quad L_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

und

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\epsilon \to 0} G_\epsilon(x - x_0) \quad \text{mit} \quad G_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \; \epsilon} e^{-x^2/\epsilon^2},$$

wobei $\epsilon > 0$

(b) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Formel

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x - x_n)$$

Hier sei $g(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion mit einfachen Nullstellen an den Punkten x_n und im Nenner steht der Betrag der Ableitung

$$g'(x_n) = \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x_n} .$$

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\infty} dx x^2 \delta(x^2 - 6x + 8).$$

(d) Berechnen Sie mit einer beliebigen Testfunktion $f(x)$ das Integral

$$\int_0^\infty dx f(x)\delta(x - b + \sqrt{x^2 + a^2}).$$

(e) Bestimmen Sie die folgende Eigenschaften:

$$x\delta(x) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta'(x - x_0) f(x) = -f'(x_0)$$

2. Coulomb-Kraft: (2 Punkte)

Berechnen Sie die Coulomb-Kraft zwischen zwei Elektronen im Abstand von $r = 10^{-9}$m im SI und im Gauß'schen System.

3. Gauß'scher Satz: (3+3+6=12 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satzes das elektrische Feld im Innen und Aussenraum der folgenden, kugelsymmetrischen Ladungsverteilungen (Gesamtladung Q und Radius R). Skizzieren Sie jeweils den Feldverlauf sowohl im Innen- als auch im Aussenraum.

(a) leitende Kugel

(b) gleichmässig verteilte Ladung

(c) Ladungsdichte, die mit r^n variiert ($n > -3$, Skizze für $n = \pm 2$).