Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III (Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Igor Gornyi

Blatt 3
Besprechung 31.10.2012

N.B.: Der Übersicht halber sind die Rechnungen auf diesem Lösungsblatt in Gauss-Einheiten durchgeführt. Bei allen Ergebnissen ist der Umrechungsfaktor zu SI Einheiten in blau angegeben.

Aufgabe 1: **Kreisscheibe** (2+2+2+1+2=9 Punkte)

(a) "Berechnen Sie das Potential $\Phi(z)$ entlang der **z-Achse**."

Es bietet sich an, Zylinderkoordinaten zu wählen.

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \int_0^\infty d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\delta(z')\,\theta(R-\rho)\,\sigma}{\sqrt{(z'-z)^2+\rho^2}} \\ &= 2\pi\sigma \int_0^R d\rho \frac{\rho}{\sqrt{z^2+\rho^2}} \\ &= 2\pi\sigma \left[\sqrt{z^2+R^2} - |z|\right] \left(\times \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \qquad (1)\end{aligned}$$

(b) "Berechnen Sie aus dem Potential die Feldstärke $\vec{E}(z)$ und geben Sie den Sprung des elektrischen Feldes bei $z = 0$ an."

$$\vec{E}(z) = -\nabla\Phi(z) = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\times\right) 2\pi\sigma \left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} - \mathrm{sgn}(z)\right) \hat{e}_z \qquad (2)$$

Daher ist $E_z(0^+) - E_z(0^-) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\times\right) 4\pi\sigma$.

(c) "Untersuchen Sie das elektrische Feld für sehr große Abstände, $z \gg R$. Wie verhält sich das Feld verglichen mit dem einer Punktladung?"

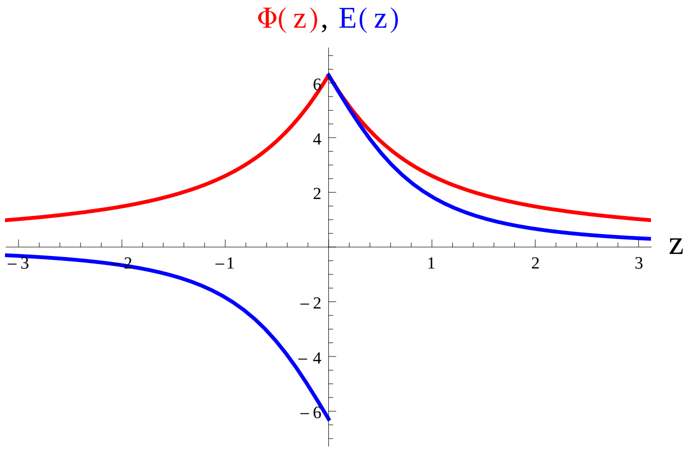
Für $|z| \ll R$ gilt $\sqrt{z^2+R^2} = |z|\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}} \approx |z|\left(1+\frac{R^2}{2z^2}\right)$. Also

$$\begin{aligned}E_z(z) &= -2\pi\sigma \left(\mathrm{sgn}(z)\left(1-\frac{R^2}{2z^2}\right) - \mathrm{sgn}(z)\right) \\ &= \pi\sigma\,\mathrm{sgn}(z)\frac{R^2}{z^2} = \mathrm{sgn}(z)\frac{Q}{z^2}\left(\times\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \qquad (3)\end{aligned}$$

Eine Punktladung Q im Ursprung induziert auf der z-Achse ein Potential $\Phi(z) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\times\right)\frac{Q}{|z|}$ und daher das gleiche elektrische Feld wie in Gln. (3): $E_z(r) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\times\right)\text{sgn}(z)\frac{Q}{z^2}$.

(d) "Skizzieren Sie $E(z)$ und $\Phi(z)$."

Im folgenden Plot ist $\sigma = 1 esu\, cm^{-2}$ und $R = 1cm$. Also ist $[E] = esu\, cm^{-2}$ und $[\Phi] = esu\, cm^{-1}$ für z in cm.



(e) "Geben Sie die Feldstärke $\vec{E}(z)$ in dem Grenzfall $R \to \infty$ bei konstanter Oberflächenladungsdichte an und verifizieren Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des Gauß'schen Satzes."

Aus Teilaufgabe b) folgt

$$E_z(z) \xrightarrow{R\to\infty} 2\pi\sigma\text{sgn}(z)\left(\times\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right) \tag{4}$$

Alternativ kann man den Gauss'schen Satz anwenden, wobei wir über das Volumen V_Z des Zylinders $z' \in (-z, z)$, $r = R$ integrieren. Im Limes $R/|z| \to \infty$ vernachlässigen wir die Randterme und bekommen

$$\oint_{\partial V_Z} \vec{E} d\vec{A} = \pi R^2 \left(E_z(z) - E_z(-z)\right) = 4\pi Q.$$

Aus Symmetriegründen folgt

$$E_z(z) = \text{sgn}(z) 2\frac{Q}{R^2}\left(\times\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right), \tag{5}$$

im Einklang mit dem vorigen Ergebnis.

Aufgabe 2: **Anordnungen von Punktladungen** (1+2=3 Punkte)

(a) "Dreizehn Ladungen q sitzen auf den Ecken eines ebenen regelmäßigen Dreizehnecks (Seitenlänge a). Welche Kraft erfährt eine Testladung Q, die in der Mitte des Dreizehnecks platziert wird?"

Auf Grund der Symmetrie des Problems kann die zentrale Ladung keine Kraft erfahren. Diese Aussage lässt sich wie folgt in Formeln schreiben. Wir verwenden Zylinderkoordinaten mit Ursprung an der Position des zentralen Teilchens. Die Kraft auf es genügt

$$\vec{F} \propto \sum_{n=0}^{12} \hat{r}_n$$

wobei $\vec{r}_n = R\left(\mathfrak{Re}\ e^{in\phi_0}, \mathfrak{Im}\ e^{in\phi_0}, 0\right)^T$,

$$R = \frac{a}{2\sin\left(\phi_0/2\right)},$$

die Position des $n-ten$ Teilchen ist $(\phi_0 = 2\pi/13)$. Da

$$\sum_{n=0}^{12} e^{in\phi_0} = \frac{\left(e^{i\phi_0}\right)^{12+1} - 1}{e^{i\phi_0} - 1} = 0$$

folgt $\vec{F} = 0$.

(b) “Nun wird eine der dreizehn Ladungen entfernt. Wie gross ist nun die Kraft auf die Testladung in der Mitte?”

Wir wählen unser Koordinatensystem derart, dass das fehlende Teilchen $n = 0$ entspricht.

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= Qq \int d^3x' \frac{-\vec{x}'}{|\vec{x}'|^3} \sum_{n=1}^{12} \delta\left(\vec{x}' - \vec{r}_n\right) \\
&= Qq \int d^3x' \frac{-\vec{x}'}{|\vec{x}'|^3} \left[\sum_{n=0}^{12} \delta\left(\vec{x}' - \vec{r}_n\right) - \delta\left(\vec{x}' - \frac{a\hat{e}_x}{2\sin\left(\phi_0/2\right)}\right)\right] \\
&\overset{\text{Teilaufgabe }(a)}{=} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\times\right) qQ \left[\frac{a}{2\sin\left(\phi_0/2\right)}\right]^{-2} \hat{e}_x
\end{aligned} \tag{6}$$

Die Kraft entspricht also der Coulombkraft zwischen einem q entgegengesetzt geladenen “Loch” und zentralen Ladung:

$$F = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\times\right) \frac{qQ}{R^2}$$

Falls q und Q das gleiche Vorzeichen haben, wird das zentrale Teilchen vom “Loch” angezogen.

Aufgabe 3: **Kapazität** (2+1+6+1+3=13 Punkte)

(a) “Drücken Sie C durch C_{ij} aus, wobei C_{ij} die Kapazitätsmatrix ist.”

<u>Hinweis</u>: Im Folgenden ist eine für das Erbringen der studentischen Vorleistung ausreichende Lösung des Problems dargestellt.

Allgemein ist jede symmetrische ($C_{12} = C_{21}$) Kapazitätsmatrix denkbar. Am Ende der Lösungen ist ein Kommentar eingefügt, in dem wir eine solche 2×2-Matrix explizit konstruieren.
Gemäß der Definition in der Vorlesung entspricht Φ_i der Potentialdifferenz (= Spannung) zwischen i-ter Ladung und Erde (bzw. Potential bei $\vec{x} = \infty$). Wie im Kommentar erklärt, ist diese Definition, die einen dritten Körper (Erde) annimmt, wesentlich für die Struktur der Matrix C_{ij}.

(Wir notieren Matrizen (Vektoren) durch doppelte (einfache) Unterstreichung.)
Wir nehmen $\det \underline{\underline{C}} \neq 0$ an.

$$\begin{aligned} \Phi_1 - \Phi_2 &= (1, -1)\, \underline{\Phi} \\ &= Q\,(1, -1)\, \underline{\underline{C}}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7}$$

Da $\underline{\underline{C}}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \underline{\underline{C}}} \begin{pmatrix} C_{22} + C_{12} \\ -(C_{11} + C_{21}) \end{pmatrix}$ folgt

$$\frac{Q}{U} \equiv \frac{Q}{|\Phi_1 - \Phi_2|} \equiv C = \left| \frac{\sum_{ij} C_{ij}}{\det \underline{\underline{C}}} \right|^{-1} = \frac{|C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}|}{|C_{11} + C_{22} + C_{12} + C_{21}|}. \tag{8}$$

Im letzten Schritt nahmen wir $\sum_{ij} C_{ij} \neq 0$ an. *Wie erwähnt basiert diese Formel auf den Annahmen* $\det \underline{\underline{C}} \neq 0$ *und* $\sum_{ij} C_{ij} \neq 0$. *Im Kommentar am Ende des Lösungsblattes gehen wir auf Fälle ein, in denen diese Annahmen nicht zutreffen.*

2.

(b) "Die Einheit der Kapazität in SI-Einheiten ist Farad, $1F = 1C/V$. In welcher Einheit werden Kapazitten im Gauß'schen System gemessen?"

$$[C] = \frac{[Q]}{[\Phi]} = \frac{esu}{erg/esu} = \frac{\frac{g\,cm^3}{s^2}}{\frac{g\,cm^2}{s^2}} = cm \tag{9}$$

(c) "Die Kapazität pro Längeneinheit eines langen Zylinderkondensators soll berechnet werden [...]"

Wir wählen wieder Zylinderkoordinaten.

1. "Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte σ auf der Kernelektrode."

Die Flächenladungsdichte ist

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{Q}{2\pi a l} \left(\text{“Kernelektrode”} \right) \\ \sigma_b &= -\frac{Q}{2\pi b l} \end{aligned} \tag{10}$$

und folglich die Raumladungsdichte

$$\rho\,(\vec{x}) = \sum_{R=a,b} \sigma_R \delta\,(\rho - R)\,.$$

2. "Berechnen Sie $\vec{E}(r)$ in den Bereichen $r < a$, $a < r < b$ und $b < r$."

Anwenden des Gauss'schen Satzes (Integrationsvolumen ein Zylinder des Radiuses r) liefert

$$E_r(r) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\times\right)\frac{2Q}{rl}\theta(r-a)\,\theta(b-r)\,. \tag{11}$$

3. "Leiten Sie aus dem elektrischen Feld $\vec{E}$ das Potential Φ her. Setzen Sie dabei $\Phi(\infty) = 0$. Skizzieren Sie $E(r)$ und $\Phi(r)$."

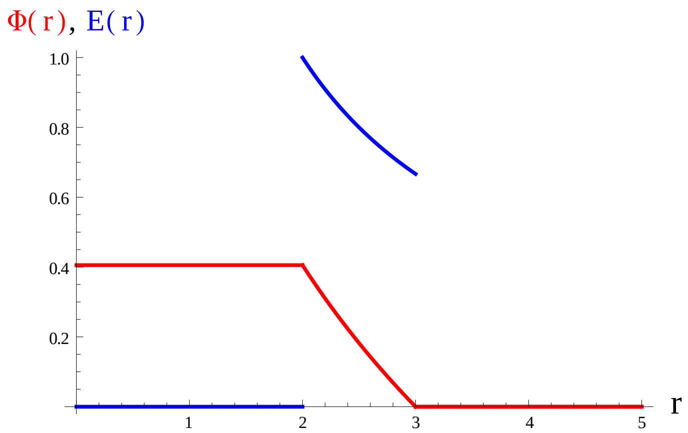
Im Innenbereich gilt

$$\Phi(r) = -\int_a^r dr' E_r(r') = -\frac{2Q}{l}\ln\frac{r}{a} + \Phi_0.$$

Das Verhalten bei $r \to \infty$ bestimmt die Integrationskonstante und folglich (mit Hilfe der Stetigkeitsbedingung für Φ)

$$\Phi(r) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\times\right)\left[-\frac{2Q}{l}\ln\frac{r}{b}\theta(r-a)\,\theta(b-r) - \frac{2Q}{l}\ln\frac{a}{b}\theta(a-r)\right]. \tag{12}$$

Die logarithmische Abhängigkeit ist typisch für ein effektiv zweidimensionales Problem. Im Plot ist $2Q/l = 1esu/cm$, $a = 2cm$ und $b = 3cm$, E und Φ) in $esu\,cm^{-2}$ respektive $esu\,cm^{-1}$.



4. "Bestimmen Sie die Energie W pro Längenelement in dem Kondensator durch das Volumenintegral einmal über $\vec{E}^2(\vec{r})$ und einmal über $\rho(\vec{r})\Phi(\vec{r})$."

$$W = \frac{1}{8\pi}\int d^3x|\vec{E}|^2 = \frac{l}{4}\int_a^b dr\; r\left(\frac{2Q}{rl}\right)^2 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\times\right)\frac{Q^2}{l}\ln b/a. \tag{13}$$

Alternativ

$$W = \frac{1}{2}\int d^3x\rho(\vec{x})\Phi(\vec{x}) \overset{\text{Teilaufgabe (c) 1.,3.}}{=} \pi l\frac{2Q}{l}\sigma_b\ln b/a = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\times\right)\frac{Q^2}{l}\ln b/a. \tag{14}$$

5. "Geben Sie die Kapazität des Kondensators pro Längeneinheit an."

$$U = \Phi(a) - \Phi(b) = \frac{2Q}{l} \ln b/a \tag{15}$$

und folglich

$$C = (4\pi\epsilon_0 \times) \frac{l}{2 \ln b/a}. \tag{16}$$

6. "Wie groß ist der innere Durchmesser des äußeren Leiters eines luftgefüllten Koaxialkabels, dessen zentral gelegener Leiter ein zylindrisches Kabel mit dem Durchmesser $d = 1$mm ist, und dessen Kapazität pro Längeneinheit $3 \cdot 10^{-11}$F/m ist? "

Umstellen der Formel aus 4. liefert

$$b = ae^{\frac{2\pi\epsilon_0}{C/l}} = 3.2\text{mm}. \tag{17}$$

"Berechnen Sie die Kapazität C folgender Kondensatoren:"

Wir nehmen Gesamtladungen von $\pm Q$ wobei $Q > 0$ an.

d) "zwei große ebene, leitende Flächen der Größe A im Abstand d zueinander (Inhomogenitäten des Randfeldes können vernachlässigt werden)"

Wir wählen quaderförmige Integrationsvolumina die keine, eine bzw. beide Platten einschließen und finden

$$E_z(z) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times\right) \frac{4\pi Q}{A} \theta(z) \theta(d-z),$$

wobei die Platte mit Ladungsdichte Q/A $(-Q/A)$ im gewählen Koordinatensystem bei $z = 0$ $(z = d)$ ist.

Folglich ist $U = \frac{4\pi Q}{A} d$ und

$$C = (4\pi\epsilon_0 \times) \frac{A}{4\pi d} \tag{18}$$

e) zwei konzentrische leitende Kugeln mit den Radien a, b, mit $b > a$

Die Anwendung des Gauß'schen Satzen mit kugelförmigen Integrationsvolumina liefert

$$r^2 E_r(r) = Q\theta(r-a)\theta(b-r).$$

Folglich ist

$$U = |-\int_a^b E_r(r)| = Q\frac{b-a}{ab},$$

und

$$C = (4\pi\epsilon_0 \times) \frac{ab}{b-a}. \tag{19}$$

Kommentar zur Aufgabe 3. a

Motivation. In diesem Kommentar soll die Bedeutung der 2×2 Kapazitätsmatrix C_{ij} verdeutlicht werden. Insbesondere sind einige Subtilitäten bezüglich Eichinvarianz mit dieser Aufgabe verbunden, die hier dargestellt werden.

Wie erwähnt ist es wesentlich den Referenzpunkt Erde zu beachten. Wir verwenden in diesem Kommentar folgende Notation

- $\phi(\vec{r})$ beschreibt das elektrostatische Potential. Unter Eichtransformationen verhält es sich wie $\phi(\vec{r}) \to \phi(\vec{r}) + \alpha$ (mit α konstant). Beachten Sie, dass das elektrische Feld unabhängig von α, also eichinvariant, ist. (Andernfalls wäre es keine messbar Größe.)
- $\Phi_{1,2} = \phi(\vec{r}_{1,2}) - \phi_\infty$ ist die Spannung gegenüber der Erde (ϕ_∞). Φ ist eichinvariant und folglich messbar.

In der Formel aus der Aufgabenstellung tritt, wie in der Vorlesung eingeführt, die Spannung Φ auf. Somit beschreibt diese Formel (samt 2×2 Kapazitätsmatrix C_{ij}) ein *drei* Körper Problem (Ladung 1, Ladung 2 und Erde). Wollte man dieses Problem mit Potentialen ϕ beschreiben, bräuchte man eine 3×3 Matrix. Aufgrund des Verhaltens von ϕ under Eichtransformationen hätte diese Matrix jedoch einen 0 - Eigenwert (siehe Erklärung unten).

Grenzfälle der Lösung im Hauptteil. Wie im Hauptteil beschrieben lässt sich die Kapazität des einfachen Kondensators aus zwei Ladungsträgern wie folgt aus der Kapazitätsmatrix berechnen:

$$C = \left| \frac{\sum_{ij} C_{ij}}{\det \underline{\underline{C}}} \right|^{-1} = \frac{|C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}|}{|C_{11} + C_{22} + C_{12} + C_{21}|}.$$

Aus dieser Formel lassen sich wie folgt die Grenzfälle

(i) $\det \underline{\underline{C}} = 0$, $\sum_{ij} C_{ij} \neq 0$,

(ii) $\det \underline{\underline{C}} = 0$, $\sum_{ij} C_{ij} = 0$

ziehen:

(i) $C = 0$ (offensichtlich).

(ii) Die Bedingungen für diesen Fall, zusammen mit der Symmetriebedingung, erlauben einzig eine Matrix

$$\underline{\underline{C}} = C' \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit skalarem Vorfaktor C'. Es folgt $\frac{Q}{U} \equiv C = C'$.
Weiter unten in diesem Kommentar wird erklärt, dass dieser Fall dem Problem zweier Ladungen $Q_1 = -Q_2$ *ohne* Erdung entspricht. (Beachten Sie dass der Fall $Q_1 \neq -Q_2$ die Elektroneutralität verletzt und nicht als zwei Körper Problem betrachten werden kann.)

Beschreibung als Schaltkreis der Kapazitäten. Wir möchten der Kapazitätsmatrix zweier Ladungen $Q_{1,2}$ auf Potentialen $\Phi_{1,2}$ eine explizite Bedeutung geben. Das vorliegende Problem lässt sich äquivalent durch das Ersatzbild (Schaltkreis Abb.) mit Einzelkapazitäten $c_{1\infty}, c_{2\infty}$ und c_{12} beschreiben. Wir wiederholen an dieser Stelle, dass es ein *drei*-Körperproblem ist. Es folgt:

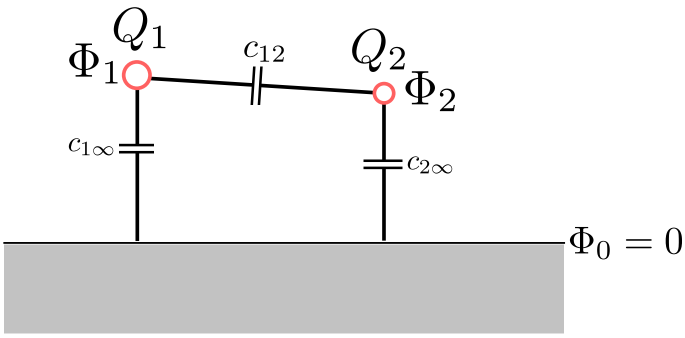
$$\begin{aligned} Q_1 &= c_{1\infty}\left(\phi_1 - \phi_\infty\right) + c_{12}\left(\phi_1 - \phi_2\right), \\ Q_2 &= c_{2\infty}\left(\phi_2 - \phi_\infty\right) + c_{12}\left(\phi_2 - \phi_1\right). \end{aligned}$$

In Vektornotation

$$\underline{Q} = \underline{\underline{C}}\underline{\Phi}, \tag{20}$$

wobei direkter Koeffizientenvergleich definiert

$$C_{11} = c_{1\infty} + c_{12},\ C_{22} = c_{2\infty} + c_{12},\ C_{12} = C_{21} = -c_{12}. \tag{21}$$



Nun wird offensichtlich, dass sich die Lösung der Aufgabe auch alternativ mit Hilfe des Schaltkreises der Kapazitäten berechnen ließe: Kapazitäten $c_{1\infty}$ und $c_{2\infty}$ sind in Reihe zueinander und parallel zu c_{12} geschaltet. Es folgt für die Kapazität $C = \frac{Q}{\Phi_1 - \Phi_2}$

$$C = c_{12} + \frac{c_{1\infty}c_{2\infty}}{c_{1\infty} + c_{2\infty}} = \frac{\det \underline{\underline{C}}}{\sum_{ij} C_{ij}}$$

(Wir haben die Umkehrung von Gln. (21) verwendet: $c_{1\infty} = C_{11} + C_{12}$, $c_{2\infty} = C_{22} + C_{12}$.) Die Aufgabe ließe sich also gleichwertig auf diese Weise lösen.

Entkopplungsfall: Wir kehren zur allgemeinen Gleichung zurück und schreiben sie mit Hilfe der Potentiale:

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{12} \end{pmatrix} \underline{\phi} + \begin{pmatrix} c_{1\infty} & 0 \\ 0 & c_{2\infty} \end{pmatrix} \underline{\phi} - \phi_\infty \begin{pmatrix} c_{1\infty} \\ c_{2\infty} \end{pmatrix}.$$

Es gibt Situationen, in denen die beiden Ladungsträger kapazitiv von der Erde entkoppeln. Damit sind geometrische Anordnungen gemeint, in denen die Kapazitäten zur Erde vernachlässig bar klein sind ($c_{i\infty}/c_{12} \to 0$). Die Erde kann keine Ladungen mehr auf den Ladungsträgern induzieren. Ein Beispiel ist ein Plattenkondensator mit unendlich großen Platten.
Nur der erste Term überlebt in diesem Fall und die Kapazitätsmatrix ist von einem einzigen Parameter (c_{12}) abhänging:

$$\underline{\underline{C}} = c_{12} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies wurde als Sonderfall (ii) der Lösungen betrachtet (siehe oben). In diesem Fall ist die Kapazität

$$C = \frac{Q}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} = c_{12},$$

im Einklang mit der Erwartungshaltung.

Eichinvarianz und Struktur der Kapazitätsmatrix. Die Abhängigkeit von einem einzelnen Parameter im Entkopplungsfall ist einer tiefen physikalischen Ursache geschuldet: der Eichinvarianz. Insbesondere ist die Matrixstruktur

$$\underline{\underline{C}} = C \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Folge der Eichinvarianz. Unter Eichtransformationen $\underline{\phi} \to \underline{\phi} + \alpha \, (1,1)^T$ muss die Gleichung $\underline{Q} = \underline{\underline{C}}\underline{\phi}$ invariant sein. Es folgt $\underline{\underline{C}} \, (1,1)^T = 0$ und somit $\sum_j C_{ij} = 0$. Die Symmetrie ist im Ersatzbild offensichtlich.