Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik III
(Theorie C – Elektrodynamik) WS 12-13

Prof. Dr. Alexander Mirlin
Dr. Igor Gornyi

Blatt 5
Besprechung 14.11.2012

Aufgabe 1: **Kugelflächenfunktionen** (10 Punkte)

Betrachten Sie eine Kugelschale mit Radius R, deren beide Hemisphären isoliert voneinander sind und auf unterschiedlichem Potential liegen (die Dicke der isolierenden Schicht zwischen den Hemisphären ist viel kleiner als der Radius, $\delta \ll R$):

$$\Phi_1 = +V \qquad (0 \leq \theta < \pi/2) \tag{1}$$
$$\Phi_2 = -V \qquad (\pi/2 < \theta \leq \pi) \tag{2}$$

Berechnen Sie das Potential im Aussen- und Innenraum jeweils als Entwicklung in Kugelflächenfunktionen bis zu $l = 5$.

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A_{lm}\, r^l + B_{lm}\, r^{-(l+1)}\right) Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3}$$
$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\phi} \tag{4}$$

mit den zugeordneten Legendre-Polynomen

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l\, l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l. \tag{5}$$

Betrachten Sie dazu zuerst die Symmetrie des Problems. Welche Vereinfachung der Gleichung (3) ergibt sich daraus?

Überlegen Sie anschliessend für Innen- und Aussenraum getrennt, was die jeweiligen Randbedingungen für die Koeffizienten A_{lm} bzw. B_{lm} bedeuten. Benutzen Sie weiterhin, dass jede Funktion $g(\theta,\phi)$ als Entwicklung in Kugelflächenfunktionen ausgedrückt werden kann:

$$g(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm} Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{6}$$

mit den Koeffizienten A_{lm} gegeben durch

$$A_{lm} = \int d\Omega\, g(\theta,\phi)\, Y^*_{lm}(\theta,\phi).$$

Aufgabe 2: **Multipolentwicklung** (2+2+2+2+2+5=15 Punkte)

Berechnen Sie das Potential in grosser Entfernung $r \gg a$ als Multiploentwicklung (bis zu max. Quadrupoltermen) der folgenden Punktladungsverteilungen:

(a) Ladung $-q$ im Ursprung, $3q$ bei $(0, 0, a)$

(b) Ladung $3q$ im Ursprung, $-q$ bei $(0, 0, -a)$

(c) Ladung $-q$ im Ursprung, $3q$ bei $(a, 0, 0)$

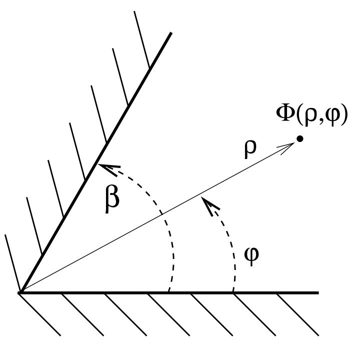
(d) Ladung $-2q$ im Ursprung, q bei $(a, 0, 0)$, q bei $(0, 0, -a)$

(e) Finden Sie eine Konfiguration von Punktladungen auf einer Linie, so dass die Multipolentwicklung des Potentials mit dem Oktupolterm beginnt.

(f) Zwei Kreisringe [Radius R und Mittelpunkt $(0, 0, a)$ bzw. $(0, 0, -a)$] sind homogen mit der Ladung q_1 bzw. q_2 geladen und liegen in den Ebenen $z = a$ bzw. $z = -a$. Berechnen Sie das Potential als Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten bis einschliesslich dem Quadrupolterm im Bereich $r_0 \gg \sqrt{R^2 + a^2}$. Welche Terme verschwinden für $q_1 = q_2$, bzw. $q_1 = -q_2$?

Bonusaufgabe: **Zylinderkoordinaten** (2+3=5 Bonuspunkte)

Wenn sich für ein Problem Zylinderkoordinaten anbieten, es aber in der z-Komponente konstant ist, vereinfacht sich das Problem, insbesondere benötigt man nicht die Bessel-Funktion. Betrachtet werden soll eine Ecke aus zwei leitenden, unendlich ausgedehnten, geerdeten Ebenen. Gesucht werden alle Funktionen, die die Laplace-Gleichung und zugleich die entsprechenden Randbedingungen erfüllen.



(a) Separieren Sie mittels des Ansatzes $\Phi = R(\rho)Q(\varphi)Z_0$ die Laplace-Gleichung.

(b) Zeigen Sie, dass die Randbedingung eines verschwindenden Potentials auf den Oberflächen die allgemeine Lösung reduziert auf:

$$\Phi(\rho, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{m\pi/\beta} \sin\left(\frac{m\pi}{\beta}\varphi\right)$$

Zur vollständigen Lösung müssten nun nur noch die Konstanten a_m aus der genauen Anordnung der felderzeugenden Ladungen im Raum bestimmt werden.
Hinweis: In Zylinderkoordinaten mit $f(\rho, \varphi, z)$ ergibt sich

$$\Delta f(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$